

Wiederauffindung von Objektbereichen
vorgeprüfter Gepäckstücke für eine weitere
Inspektion: Positionswiederfindung mit
Momenten

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des akademischen Grades

Doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt

der Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
der Technische Universität Dresden

von

Stefan Wege
geboren am 14. August 1976 in Leipzig

Gutachter: Prof. Dr. techn. Gunter Weiß
Priv. Doz. Dr.-Ing. habil. et Dr. rer. nat. Gerd-Rüdiger Jaenisch

Eingereicht am 4. Juni 2009

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	7
2. Grundlagen	11
2.1. Radiografische Bildentstehung	11
2.1.1. Schwächung und Detektion von Röntgen- oder Gammastrahlung	11
2.1.2. Aufnahmegeometrie	19
2.2. Momente von Objekt und Bild	22
3. Bekannte Verfahren	31
3.1. Positionswiederfindung durch Bildvergleich	31
3.2. Positionswiederfindung mit der Passpunktmethode	32
4. Entwicklung von Kalibrierverfahren	35
4.1. Geometriekalibrierung	35
4.2. Materialkalibrierung	45
5. Entwicklung theoretischer Grundlagen zur Positionswiederfindung mit Momenten	49
5.1. Parallelprojektion	49
5.2. Fächerscharprojektion	55
5.3. Transformation von Momenten bei Lage- und Formänderungen	63
6. Algorithmus zur Positionswiederfindung	69
6.1. Grundkonzept und Parallelstrahlprojektion	69
6.2. Algorithmus für Fächerscharprojektion	73
6.2.1. Variante 1 - Näherung durch Potenzreihen	74
6.2.2. Variante 2 - Näherung in den einzelnen Ebenen	77
6.2.3. Variante 3 - Ausnutzung der Translationsinvarianz	83
6.3. Bestimmung einer geeigneten Iterationsgröße - Inkonsistenzanalyse	99
6.4. Startwertbestimmung	111
7. Anwendung des Algorithmus auf simulierte Beispiele - Analyse von Genauigkeit und Zuverlässigkeit	117
7.1. Testobjekte mit bekannten Momenten	118
7.2. Gepäckstückähnliche Testobjekte	120
7.3. Einfluss des Rauschens und der Materialkalibrierung	125
8. Zusammenfassung und Ausblick	131
A. Beweis von Satz 5.1.1	137
B. Bild des Geometriekalibrierkörpers	139

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Priv. Doz. Dr.-Ing. habil. et Dr. rer. nat. Gerd-Rüdiger Jaenisch für die freundliche Aufnahme in seine Arbeitsgruppe sowie die engagierte Betreuung meiner Doktorarbeit. Durch seine Unterstützung, im fachlichen wie auch im organisatorischen Bereich, wurde diese Arbeit erst ermöglicht.

Bei Herrn Prof. Dr. techn. Gunter Weiß möchte ich mich herzlich für die anregenden und hilfreichen Diskussionen zu den in der Arbeit vorkommenden mathematischen Problemen, sowie seine Fähigkeit mich für geometrische Fragestellungen zu begeistern, bedanken.

Bei meinen Kollegen Herrn Dr. Carsten Bellon, Herrn Dr. Alexander Alekseychuk und Herrn Andreas Deresch möchte ich mich für ihre Hilfsbereitschaft und den intensiven fachlichen Austausch bedanken.

Bei den Mitarbeitern der Firma Smiths Detection bedanke ich mich für die gute Zusammenarbeit und die Bereitstellung der benötigten Durchstrahlungsbilder.

Zuletzt und besonders danke ich meinen Eltern, meiner Lebensgefährtin Jana Somieski und meinen Freunden Dr. Klaus Tilger und Thomas Beutlich für die Schaffung eines promotionsfördernden Umfelds.

1. Einleitung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Bereitstellung von Verfahrensverbesserungen zur automatischen Gepäckprüfung auf Flughäfen. Zur schnellen und sicheren Abfertigung von Flugzeuggepäck ist eine Automatisierung der Gepäckprüfung zweckmäßig. Die Notwendigkeit einer schnellen Prüfung besteht insbesondere bei Großraumflugzeugen, da es nicht zumutbar ist, das Gepäck mehrere Stunden vor dem Abflug abgeben zu müssen.

Zum Einsatz kommt eine mehrstufige Prüfung (Abbildung 1.1), bei der die Zuverlässigkeit und der Aufwand der Prüfung von Stufe zu Stufe zunehmen. In der ersten Stufe wird das Gepäck

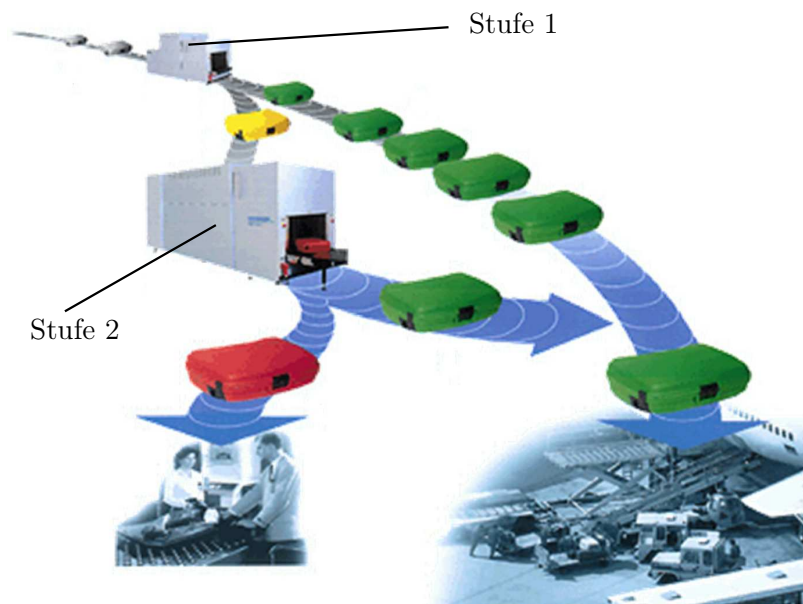


Abbildung 1.1.: Mehrstufige Gepäckprüfung [1]

von einer Prüfanlage untersucht, welche von jedem Gepäckstück mehrere Dual-Energie-Röntgendurchstrahlungsbilder (Abbildung 1.2) aus verschiedenen Richtungen anfertigt. Diese werden mittels eines Sprengstoffdetektionsalgorithmus ausgewertet. Im Falle des Verdachts auf Sprengstoff werden in den einzelnen Projektionsbildern kritische Bereiche markiert, aus welchen der kritische 3D-Bereich innerhalb des Gepäckstückes bestimmt werden kann (Abbildung 1.3). In diesem Fall wird das Gepäckstück zur Prüfanlage der zweiten Stufe transportiert, in welcher nur der kritische Bereich mit einem anderen Prüfverfahren genauer untersucht wird. Die Beschränkung der Untersuchung auf den kritischen Bereich reduziert den Zeitaufwand im Vergleich zur Prüfung des kompletten Gepäckstückes erheblich. Deshalb können in der zweiten Stufe Prüfverfahren, die bei einem größeren Zeitaufwand zuverlässigere Ergebnisse liefern, eingesetzt werden.

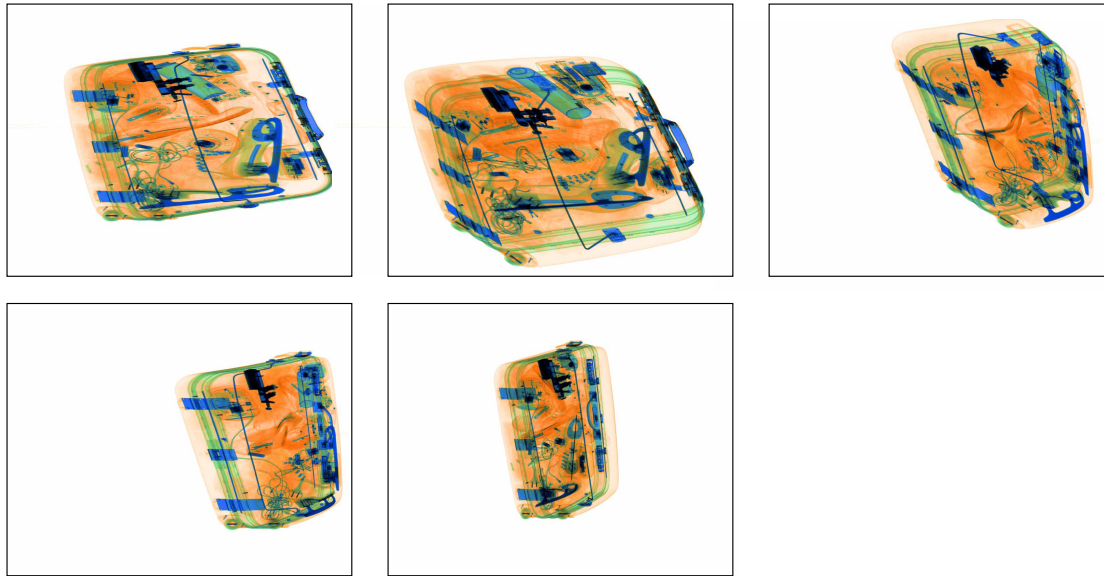


Abbildung 1.2.: Dual-Energie-Durchstrahlungsbilder der Prüfung eines Gepäckstückes in Stufe 1

Beim Transport zur Maschine der zweiten Stufe unterliegt das Gepäckstück unkontrollierten Lageveränderungen. Daher ist die Lage des Gepäckstückes und damit des kritischen Bereichs bei der Prüfung der zweiten Stufe zunächst nicht bekannt.

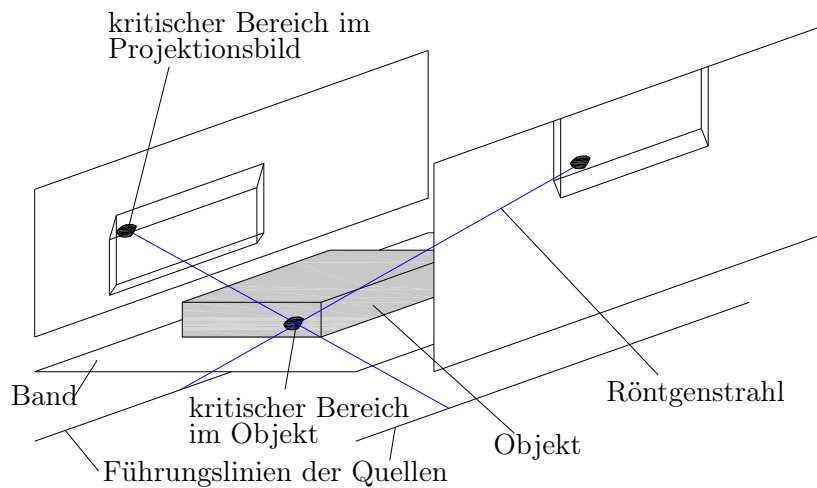


Abbildung 1.3.: Ermittlung eines kritischen Bereiches

Um die veränderte Lage des kritischen Bereiches zu bestimmen, soll in der Maschine der zweiten Stufe lediglich eine weitere Durchstrahlungsaufnahme angefertigt werden (Abbildung 1.4), weil der Platzbedarf und die Kosten mit jeder weiteren Aufnahme deutlich zunehmen. Die Bestimmung der veränderten Lage wird als Positionswiederfindung bezeichnet. Diese soll innerhalb von wenigen Sekunden durchgeführt werden, wobei eine Genauigkeit von etwa zwei Zentimetern angestrebt wird.

In der Vergangenheit wurden verschiedene Ansätze zur Positionswiederfindung verfolgt. So existiert ein Verfahren, welches auf einem Bildvergleich von jeweils einem Bild der ersten und der

zweiten Stufe beruht. Dieses Verfahren unterliegt großen Einschränkungen an die möglichen Lageveränderungen. So können nur Bewegungen in der Bildebene und zusätzlich ein horizontales Umklappen des Gepäckstückes betrachtet werden. Ein weiterer Ansatz ist die Passpunktmethode. Sie besteht darin, die Lageveränderung des Gepäckstückes durch die Betrachtung der Lageveränderung von charakteristischen Punkten (Passpunkten) zu bestimmen. Bei der Umsetzung dieses Ansatzes müssen die Detektion und Charakterisierung der Passpunkte so gestaltet werden, dass sich Paare von zusammengehörigen Passpunkten in den verschiedenen Bildern finden lassen. Dieses Problem ist bisher nicht zufriedenstellend gelöst.

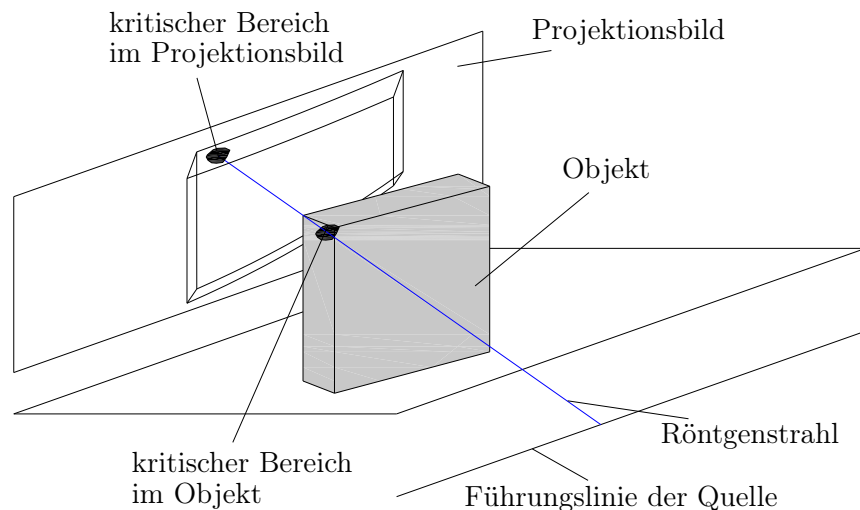


Abbildung 1.4.: Lage des kritischen Bereiches in Stufe 2

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein neuer Ansatz zur Positionswiederfindung entwickelt und untersucht, welcher als Ausgangspunkt die Momente der Grauwertverteilungen der Durchstrahlungsbilder (Momente der Bilder) und die Momente der Schwächungskoeffizientenverteilung des Gepäckstückes (Momente des Objektes) verwendet. Die Momente sind integrale Größen, welche zur Beschreibung der Verteilungen verwendet werden. Sie erscheinen geeignet, weil

- die Momente des Objektes nach einer Lageveränderung durch die Momente des Objektes der Ausgangslage festgelegt sind und
- ein Zusammenhang zwischen den Momenten des Bildes und den Momenten des Objektes vermutet wird, da sich die Grauwerte der Bilder aus den Linienintegralen der Schwächungskoeffizienten entlang der Röntgenstrahlen berechnen lassen.

Es sind die mathematischen Beziehungen zwischen Momenten des Bildes und Momenten des Objektes für verschiedene Aufnahmegeometrien zu ermitteln. Aufbauend auf diesen Beziehungen ist ein Algorithmus zur Positionswiederfindung zu erstellen, welcher den praktischen Anforderungen genügt. Zur Lösung dieses Problems müssen Methoden der Abbildungsgeometrie, der Analysis, der Numerischen Mathematik sowie der Physik kombiniert werden.

Die Arbeit wurde an der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM) in enger Zusammenarbeit mit der Firma Smiths Detection angefertigt. Die in der Arbeit betrachteten Durchstrahlungsaufnahmen wurden von der Gepäckprüfanlage des Typs EDtS der Firma Smiths Detection erstellt.

2. Grundlagen

Die Gesetzmäßigkeiten der Bildentstehung bei Röntgendurchstrahlungsanlagen und der Begriff des Momentes eines Objektes beziehungsweise des Momentes eines Bildes sind die für die Positionswiederfindung verwendeten theoretischen Grundlagen. Diese werden im Folgenden in einer für die vorliegende Arbeit zweckmäßigen Form aufbereitet.

Aus der radiografischen Messung können im Fall monoenergetischer Strahlungsquellen Linienintegrale über bestimmte Materialkenngrößen bestimmt werden. In diesem Kapitel wird zusätzlich aufgezeigt, dass auch im Fall polyenergetischer Strahlungsquellen Linienintegrale bestimmt werden können. Die Darstellung erfolgt deshalb in einer geringfügig von der Literatur abweichenden Form.

2.1. Radiografische Bildentstehung

2.1.1. Schwächung und Detektion von Röntgen- oder Gammastrahlung

Die der Bildentstehung von Durchstrahlungsbildern zugrunde liegenden physikalischen Prozesse sind die Wechselwirkungen von elektromagnetischer Strahlung im Energiebereich von etwa 10 keV bis etwa 10 MeV mit den Atomen des durchstrahlten Materials. Diese Strahlung wird in Abhängigkeit von ihrer Entstehung als Röntgen- oder Gammastrahlung bezeichnet. Die Wellenlänge dieser Strahlung ist kleiner oder gleich der Atomdimension. Zu den Wechselwirkungsprozessen gehören

- der Photoeffekt,
- der Compton-Effekt,
- der Paarbildungseffekt und
- die Rayleigh-Streuung.

Eine Quelle sendet einen Photonenstrahl aus, welcher nach Durchstrahlung des zu untersuchenden Materials von einem Detektor erfasst wird. Für die Durchstrahlungsbilder ist die durch obige Wechselwirkungen verursachte Schwächung dieses Photonenstrahls relevant. Der Wert der Schwächung ist durch die Wechselwirkungsquerschnitte gegeben. Die Streustrahlung hat, wie in Abbildung 2.1 dargestellt, bei kollimierten Detektoren nur einen sehr geringen Einfluss auf das Durchstrahlungsbild.

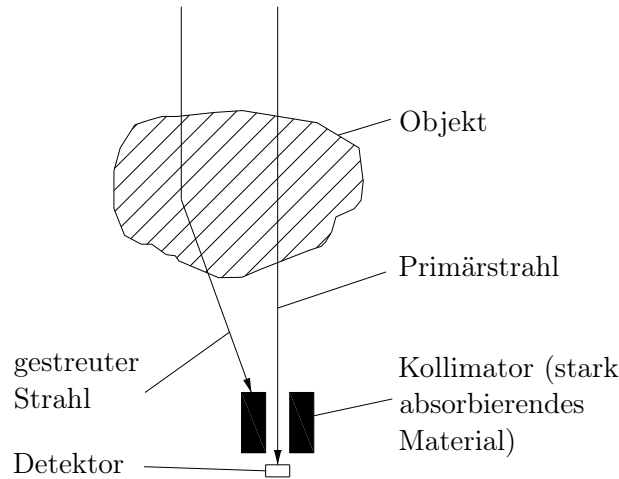


Abbildung 2.1.: Detektion eines Photonenstrahls

Photoeffekt

Als Photoeffekt wird der in Abbildung 2.2 dargestellte Prozess der Emission eines gebundenen Elektrons infolge der Absorption eines Photons bezeichnet.

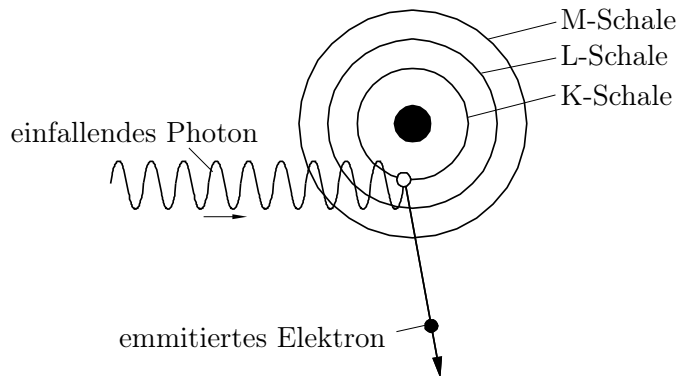


Abbildung 2.2.: Photoeffekt

Der Wechselwirkungsquerschnitt $\sigma_F(Z, E_\gamma)$ des Photoeffektes hat starke Maxima für die Photonenenergien E_γ , welche den Bindungsenergien der Elektronen einer bestimmten Schale entsprechen [2]. Für Photonenenergien E_γ , welche größer sind als die Bindungsenergie $E_B(Z)$ eines Elektrons der K-Schale, lassen sich die Wechselwirkungsquerschnitte $\sigma_F(Z, E_\gamma)$ durch eine einfache gemeinsame Formel beschreiben. Die Bindungsenergie $E_B(Z)$ der Elektronen der K-Schale steigt mit der Ordnungszahl Z . Nach [3] gilt die Näherungsformel

$$E_B(Z) = \frac{1}{2} E_0 \alpha^2 Z^2, \quad (2.1)$$

wobei α die Feinstrukturkonstante und $E_0 \approx 0,511$ MeV die Ruheenergie des Elektrons ist. Für das Element Silber mit der vergleichsweise hohen Ordnungszahl 47 liegt die Bindungsenergie bei 25,5 keV. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass Messsysteme verwendet werden, bei denen der Großteil der detektierten Strahlung Photonenenergien oberhalb von $E_B(Z)$ besitzt.

In der Literatur werden verschiedene voneinander abweichende Näherungsformeln angegeben. So gilt nach [4] für den Wechselwirkungsquerschnitt $\sigma_F(Z, E_\gamma)$ eines Atoms der Ordnungszahl Z

$$\sigma_F(Z, E_\gamma) = c_F Z^4 (1 + 0,008Z) E_\gamma^{-3} \quad \text{für } E_\gamma > E_B(Z), \quad (2.2)$$

wobei c_F eine von Z und E_γ unabhängige Konstante ist. In [5] wird

$$\sigma_F(Z, E_\gamma) = c_F Z^{n(Z)} E_\gamma^{-3} \quad \text{für } E_\gamma > E_B(Z) \quad (2.3)$$

angegeben, wobei n für niedrige Ordnungszahlen etwa den Wert 4 und für hohe Ordnungszahlen den Wert 4,5 annimmt. Abweichend dazu wird häufig [2, 6–9] nur eine von Heitler ermittelte erste Näherung verwendet. Diese lautet nach [10]

$$\sigma_F(Z, E_\gamma) = \bar{c}_F Z^5 E_\gamma^{-3,5} \quad \text{für } E_\gamma > E_B(Z).^1 \quad (2.4)$$

Nach [3] weicht diese Näherung in den meisten Bereichen um mehrere hundert Prozent von den relativ genauen Werten der Datenbank *XCOM Photon Cross Section Database* des *NIST*² ab. Der Wert für $\sigma_F(Z, E_\gamma)$ aus Gleichung (2.4) muss nach Heitler mit dem Korrekturfaktor

$$k(E_\gamma) = 2\pi Z \alpha \sqrt{\frac{E_0}{2E_\gamma}} \frac{e^{-4\xi \operatorname{arccot} \xi}}{1 - e^{-2\pi\xi}} \quad \text{mit} \quad \xi = \sqrt{\frac{E_B(Z)}{E_\gamma - E_B(Z)}} \quad (2.5)$$

multipliziert werden, um eine bessere Näherung zu erhalten. Eigene Berechnungen ergaben, dass der Faktor $e^{-4\xi \operatorname{arccot} \xi} / (1 - e^{-2\pi\xi})$ für $E_\gamma/E_B(Z) \in (1, 20)$ in guter Näherung proportional zu $(E_\gamma/E_B(Z))^{n_1}$ mit $n_1 \approx 1$ ist. Damit ergibt sich nach der Korrektur und unter Verwendung von Gleichung (2.1) dieselbe Energie- und Ordnungszahlabhängigkeit wie in den Gleichungen (2.2) und (2.3).

Compton-Effekt

Beim Compton-Effekt wird die Energie des Photons, wie in Abbildung 2.3 dargestellt, nur teilweise auf das Elektron übertragen. Das Elektron wird wie beim Photoeffekt aus seiner Elektronenschale geschlagen.

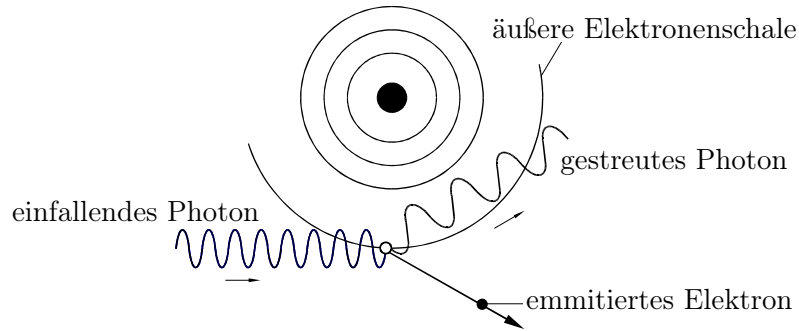


Abbildung 2.3.: Compton-Effekt

Das Photon bewegt sich mit veränderter Energie und Richtung weiter. Die Bindung des Elektrons spielt im Gegensatz zum Photoeffekt hierbei praktisch keine Rolle und wird vernachlässigt. Der Wechselwirkungsquerschnitt $\sigma_C(Z, E_\gamma)$ für die Streuung am freien Elektron beträgt [11]

$$\sigma_C(Z, E_\gamma) = c_C Z \left(\frac{1 + \epsilon}{\epsilon^2} \left(\frac{2(1 + \epsilon)}{1 + 2\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} \ln(1 + 2\epsilon) \right) + \frac{1}{2\epsilon} \ln(1 + 2\epsilon) - \frac{1 + 3\epsilon}{(1 + 2\epsilon)^2} \right). \quad (2.6)$$

¹ \bar{c}_F ist eine von c_F abweichende ebenfalls von Z und E_γ unabhängige Konstante.

²NIST: National Institute of Standards and Technology

Dabei ist $\epsilon = \frac{E_\gamma}{E_0}$ das Verhältnis aus der Energie E_γ des eingestrahnten Photons und der Ruheenergie E_0 des Elektrons. c_C ist eine von Z und E_γ unabhängige Konstante.

Paarbildung

In Folge der Absorption eines Photons im Coulomb-Feld eines Atoms kann ein Paar aus einem Positron und einem Elektron gebildet werden. Dieser in Abbildung 2.4 dargestellte Prozess wird als Paarbildung im Kernfeld bezeichnet.

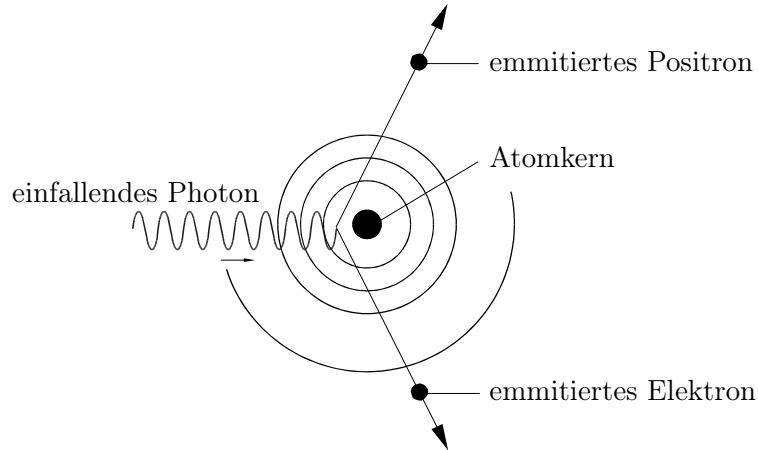


Abbildung 2.4.: Paarbildung im Kernfeld

Die Paarbildung kann nur in der Nähe des Atomkerns oder eines anderen Teilchens stattfinden, da dieses einen Teil des Impulses aufnehmen muss, damit der Prozess den Energie- und den Impulserhaltungssatz erfüllt. Die Paarbildung kann erst auftreten, wenn die Photonenenergie die Summe der Ruheenergien von Elektron und Positron übersteigt. Der Wechselwirkungsquerschnitt für diesen Prozess beträgt [12]

$$\sigma_P(Z, E_\gamma) = \begin{cases} 0 & E_\gamma < 2E_0 \\ c_P Z^2 \left(\frac{7}{9} \ln(2\epsilon) - \frac{109}{54} \right) & E_\gamma \geq 2E_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Rayleigh-Streuung

Photonen können an Elektronen gestreut werden, wobei sie ihre Energie beibehalten und nur ihre Richtung ändern. Die elastische Streuung ist kohärent, das heißt die an verschiedenen Elektronen reflektierten Wellen interferieren miteinander. Die elastische Streuung an einem freien Elektron heißt Thomson-Streuung, an den gebundenen Elektronen eines Atoms Rayleigh-Streuung. Die in Abbildung 2.5 dargestellte Rayleigh-Streuung kann bei den hier betrachteten Energiebereichen für die Schwächung des Photonenstrahls vernachlässigt werden, da die gestreute Strahlung, wie in Abbildung 2.6 an einem Beispiel dargestellt, fast ausschließlich in Richtungen, welche kaum von der Richtung des ursprünglichen Strahles abweichen, ausgesendet wird.

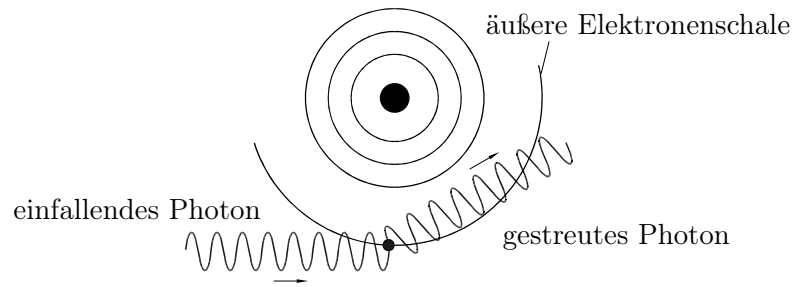


Abbildung 2.5.: Rayleigh-Streuung

Die gestreute Strahlung ist also mit der hier betrachteten Messanordnung nicht vom Primärstrahl zu unterscheiden und trägt in gleicher Weise wie der Primärstrahl zur Bildentstehung bei.

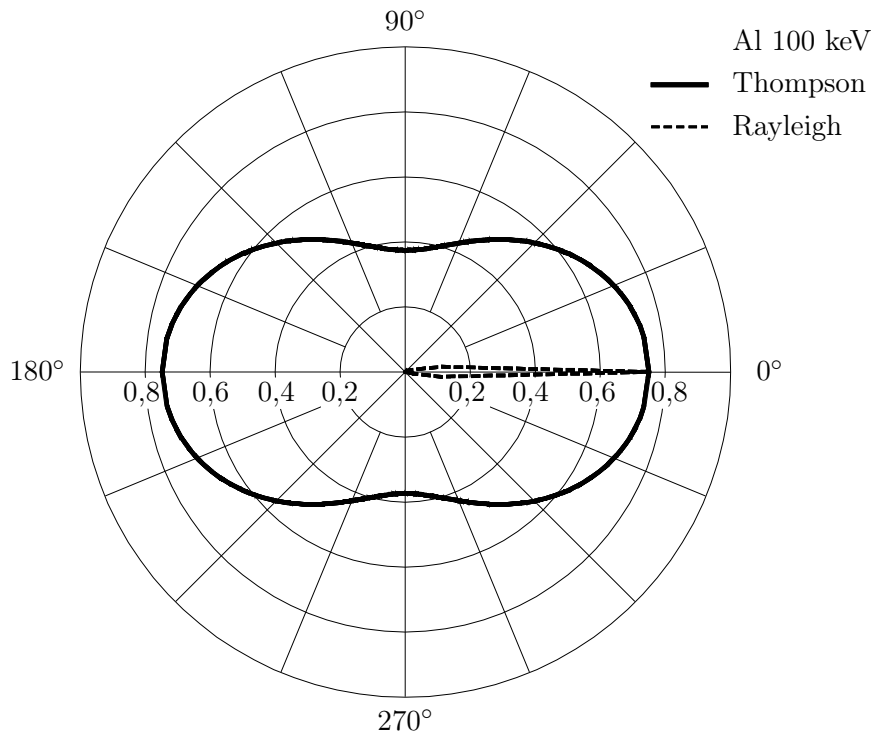


Abbildung 2.6.: Richtungsabhängigkeit elastisch gestreuter Photonen

Im Folgenden werden aus den Wechselwirkungsquerschnitten die Größen abgeleitet, welche sich mittels radiografischer Messung ermitteln lassen.

Grauwerte der Durchstrahlungsbilder

Die obigen Wechselwirkungsquerschnitte sind alle zumindest näherungsweise ein Produkt aus einer energieabhängigen Funktion $f(E_\gamma)$ und einer ordnungszahlabhängigen Funktion $h(Z)$ und lassen sich wie folgt verkürzt darstellen:

$$\sigma_F(Z, E_\gamma) = h_F(Z) f_F(E_\gamma), \quad (2.8)$$

$$\sigma_C(Z, E_\gamma) = h_C(Z) f_C(E_\gamma), \quad (2.9)$$

$$\sigma_P(Z, E_\gamma) = h_P(Z) f_P(E_\gamma). \quad (2.10)$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\sigma_{\omega}(Z, E_{\gamma}) = h_{\omega}(Z) f_{\omega}(E_{\gamma}), \quad \omega \in \{F, C, P\}. \quad (2.11)$$

Es sei $n(\mathbf{x}, Z)$ die Dichte von Teilchen mit der Ordnungszahl Z am Ort X mit dem Ortsvektor \mathbf{x} . Dann ist

$$\mu_{\omega}(\mathbf{x}, E_{\gamma}) = \sum_{Z=1}^{Z_{max}} n(\mathbf{x}, Z) \sigma_{\omega}(Z, E_{\gamma}), \quad \omega \in \{F, C, P\} \quad (2.12)$$

der Schwächungskoeffizient des Materials bezüglich der Wechselwirkung ω [13, Seite 10]. Dabei ist Z_{max} die maximale Ordnungszahl der vorkommenden Elemente. Durch Einsetzen von Gleichung (2.11) ergibt sich

$$\mu_{\omega}(\mathbf{x}, E_{\gamma}) = \sum_{Z=1}^{Z_{max}} n(\mathbf{x}, Z) h_{\omega}(Z) f_{\omega}(E_{\gamma}), \quad \omega \in \{F, C, P\}. \quad (2.13)$$

Durch Zusammenfassen des energieunabhängigen Teils zu

$$H_{\omega}(\mathbf{x}) := \sum_{Z=1}^{Z_{max}} n(\mathbf{x}, Z) h_{\omega}(Z) \quad (2.14)$$

lässt sich die Gleichung (2.13) umformen zu

$$\mu_{\omega}(\mathbf{x}, E_{\gamma}) = H_{\omega}(\mathbf{x}) f_{\omega}(E_{\gamma}). \quad (2.15)$$

Der Schwächungskoeffizient $\mu_{ges}(\mathbf{x}, E_{\gamma})$, welcher die Schwächungen durch alle betrachteten Wechselwirkungen beinhaltet, ergibt sich aus der Summation der Schwächungskoeffizienten der einzelnen Wechselwirkungen zu

$$\mu_{ges}(\mathbf{x}, E_{\gamma}) = \sum_{\omega \in \{F, C, P\}} H_{\omega}(\mathbf{x}) f_{\omega}(E_{\gamma}). \quad (2.16)$$

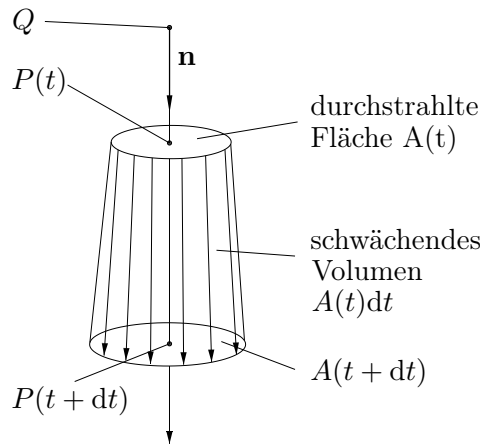


Abbildung 2.7.: Schwächung des Photonenstrahls beim Durchstrahlen wechselwirkenden Materials

Es ist anzumerken, dass $H_C(\mathbf{x})$ in etwa zur Massedichte proportional ist, da $h_C(Z) = Z$ gilt und die Masse eines Teilchens in etwa zu seiner Ordnungszahl Z proportional ist.

Im Folgenden wird die in Abbildung 2.7 dargestellte Schwächung des Photonenstrahles untersucht und eine Formel für die Intensitätsveränderung entlang des Strahles, das Schwächungsgesetz, hergeleitet. Die Ortsvektoren \mathbf{p} von Punkten P des Primärstrahls mit der Quelle Q und dem Richtungsvektor \mathbf{n} sind

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{q} + t\mathbf{n}, \quad t \in [0, \infty), \quad (2.17)$$

wobei \mathbf{q} der Ortsvektor zu Q ist.

Es sei $I(E_\gamma, \mathbf{x})$ die Intensität des Photonenstrahlanteils mit der Energie E_γ am Ort X . Weiterhin sei $\mathcal{A}(t)$ ein infinitesimales Flächenelement senkrecht zum Strahl, welches den Punkt $\mathbf{p}(t)$ enthält, sein Flächeninhalt sei $A(t)$. Der Photonenstrahl wird an jedem Punkt um den wechselwirkenden Anteil geschwächt. Die Änderung von $I(\mathbf{p}(t), E_\gamma) A(t)$ in Richtung des Strahles ist durch die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit im Volumen $A(t)dt$ gegeben, folglich gilt

$$\frac{d}{dt}(I(\mathbf{p}(t), E_\gamma) A(t)) = -I(\mathbf{p}(t), E_\gamma) A(t) \mu_{ges}(\mathbf{p}(t), E_\gamma). \quad (2.18)$$

Hierbei wird die entstehende Streustrahlung vernachlässigt. Ohne diese Vernachlässigung ergibt sich die Boltzmann-Gleichung. Die Lösung der Differentialgleichung (2.18) ist

$$I(\mathbf{p}(t), E_\gamma) A(t) = I(\mathbf{p}(t_0), E_\gamma) A(t_0) e^{-\int_{t_0}^t \mu_{ges}(\mathbf{q} + \bar{t}\mathbf{n}, E_\gamma) d\bar{t}}. \quad (2.19)$$

Daraus folgt

$$I(\mathbf{p}(t), E_\gamma) = I(\mathbf{p}(t_0), E_\gamma) \frac{A(t_0)}{A(t)} e^{-\int_{t_0}^t \mu_{ges}(\mathbf{q} + \bar{t}\mathbf{n}, E_\gamma) d\bar{t}}. \quad (2.20)$$

Für den Fall, dass kein Material durchstrahlt wird, also $\mu_{ges} \equiv 0$ gilt, ergibt sich die Intensität

$$I_0(\mathbf{p}(t), E_\gamma) := I(\mathbf{p}(t_0), E_\gamma) \frac{A(t_0)}{A(t)}. \quad (2.21)$$

Aus Gleichung (2.20) und Gleichung (2.21) ergibt sich die als Schwächungsgesetz für divergente Strahlung bekannte Formel

$$I(\mathbf{p}(t), E_\gamma) = I_0(\mathbf{p}(t), E_\gamma) e^{-\int_{t_0}^t \mu_{ges}(\mathbf{q} + \bar{t}\mathbf{n}, E_\gamma) d\bar{t}}. \quad (2.22)$$

Im Fall monoenergetischer Strahlungsquellen werden $I(\mathbf{p}(t), E_\gamma)$ und $I_0(\mathbf{p}(t), E_\gamma)$ für das zum Detektor gehörende $t = t_D$ direkt durch den im Folgenden als Grauwert bezeichneten Messwert bestimmt. Es wird dabei vereinfachend davon ausgegangen, dass der Messwert des Detektors durch die Detektion genau eines Primärstrahls festgelegt wird. In diesem Fall kann nach dem Integral aufgelöst werden:

$$\int_{t_0}^{t_D} \mu_{ges}(\mathbf{q} + \bar{t}\mathbf{n}, E_\gamma) d\bar{t} = -\ln \left(\frac{I(\mathbf{p}(t_D), E_\gamma)}{I_0(\mathbf{p}(t_D), E_\gamma)} \right). \quad (2.23)$$

Es wird im Folgenden stets angenommen, dass sich auf der zum Strahl gehörenden Geraden nur zwischen Quelle und Detektor Material befindet. In diesem Fall gilt

$$\int_{t_0}^{t_D} \mu_{ges}(\mathbf{q} + \bar{t}\mathbf{n}, E_\gamma) d\bar{t} = \int_{\mathbb{R}} \mu_{ges}(\mathbf{q} + \bar{t}\mathbf{n}, E_\gamma) d\bar{t} =: L. \quad (2.24)$$

Der Grauwert des Bildes ist proportional zu der Intensität $I(\mathbf{p}(t_D), E_\gamma)$ am Detektor. Aus den Gleichungen (2.23) und (2.24) ist ersichtlich, dass der Grauwert allein durch den Wert des Linienintegrals L bestimmt ist. Aus den Grauwerten eines Bildes lässt sich folglich ein Bild berechnen, bei dem jedem Pixel als Grauwert der Wert des zugehörigen Linienintegrals zugeordnet wird. Ein solches Bild heißt kalibriertes Bild. In Kapitel 5 wird ein Zusammenhang zwischen den Momenten des Objektes (Abschnitt 2.2) und den Momenten des kalibrierten Bildes hergestellt.

Im Fall von N_M Messungen mit verschiedenen Energien E_i , $i = 1, \dots, N_M$ lassen sich die Werte mehrerer Linienintegrale bestimmen. Damit werden mehrere gleichartige Datensätze für die Positionswiederfindung erhalten, so dass eine höhere Genauigkeit erreicht werden kann. Die zu den Energien E_i gehörenden Linienintegrale L_i berechnen sich nach Gleichung (2.24) zu

$$L_i = \int_{\mathbb{R}} \mu_{ges}(\mathbf{q} + \bar{t}\mathbf{n}, E_i) d\bar{t}, \quad i = 1, \dots, N_M. \quad (2.25)$$

Mit Gleichung (2.16) folgt daraus

$$L_i = \int_{\mathbb{R}} \sum_{\omega \in \{F, C, P\}} H_\omega(\mathbf{q} + \bar{t}\mathbf{n}) f_\omega(E_i) d\bar{t}, \quad i = 1, \dots, N_M. \quad (2.26)$$

Durch Umstellen erhält man

$$L_i = \sum_{\omega \in \{F, C, P\}} f_\omega(E_i) \int_{\mathbb{R}} H_\omega(\mathbf{q} + \bar{t}\mathbf{n}) d\bar{t}, \quad i = 1, \dots, N_M. \quad (2.27)$$

Daraus ergibt sich für die drei Linienintegrale

$$\bar{L}_\omega := \int_{\mathbb{R}} H_\omega(\mathbf{q} + \bar{t}\mathbf{n}) d\bar{t}, \quad \omega \in \{F, C, P\} \quad (2.28)$$

das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{\omega \in \{F, C, P\}} f_\omega(E_i) \bar{L}_\omega = L_i, \quad i = 1, \dots, N_M. \quad (2.29)$$

Um die zur Bestimmung der drei Unbekannten \bar{L}_F , \bar{L}_C und \bar{L}_P erforderlichen drei linearen Gleichungen zu erhalten, sind drei Messungen mit unterschiedlichen Energiewerten notwendig. Falls die Energie der Photonen für alle Messungen kleiner ist als $2E_0$, findet keine Paarerzeugung statt. \bar{L}_P liefert dann keinen Beitrag zu den Messwerten und ist nicht bestimmbar. Für die zwei verbleibenden Linienintegrale reichen zwei Messungen aus. Diesen Fall bezeichnet man als Dual-Energie-Radiometrie.

In der Praxis werden häufig polyenergetische Strahlungsquellen verwendet, da diese eine viel höhere Strahlungsleistung aufweisen. In diesem Fall lassen sich die Linienintegrale nicht direkt aus den Grauwerten bestimmen. Statt den Messungen mit unterschiedlichen Energien werden N_E Detektoren mit den spektralen Empfindlichkeiten $a_i(E) \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N_E$ verwendet. Die Messwerte G_i der Detektoren sind gegeben durch

$$G_i = \int_{\mathbb{R}} a_i(E) I(\mathbf{p}(t_D), E) dE, \quad i = 1, \dots, N_E. \quad (2.30)$$

Mit Gleichung (2.22) wird daraus

$$G_i = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{a_i(E) I_0(\mathbf{p}(t_D), E)}_{=: \bar{a}_i} e^{-\int_{t_0}^{t_D} \mu_{ges}(\mathbf{q} + \bar{t}\mathbf{n}, E) d\bar{t}} dE, \quad i = 1, \dots, N_E. \quad (2.31)$$

Daraus folgt mit Gleichung (2.24) und Gleichung (2.16)

$$G_i = \int_{\mathbb{R}} \bar{a}_i(E) e^{-\int_{\mathbb{R}} \sum_{\omega \in \{F,C,P\}} H_{\omega}(\mathbf{q} + t\mathbf{n}) f_{\omega}(E) dt}, \quad i = 1, \dots, N_E \quad (2.32)$$

und es ergibt sich mit Gleichung (2.28)

$$G_i = \int_{\mathbb{R}} \bar{a}_i(E) e^{-\sum_{\omega \in \{F,C,P\}} f_{\omega}(E) \bar{L}_{\omega}} =: F_i(\bar{L}_F, \bar{L}_C, \bar{L}_P), \quad i = 1, \dots, N_E. \quad (2.33)$$

Demnach lässt sich aus einer einzelnen Messung ($N_E = 1$) zu keinem Linienintegral dessen Wert bestimmen. Im Fall von drei Messwerten erhält man bei bekannter spektraler Empfindlichkeit $\bar{a}_i(E)$ des Messsystems ein nichtlineares Gleichungssystem für die drei Unbekannten \bar{L}_F , \bar{L}_C und \bar{L}_P . Im Fall einer Dual-Energie-Durchstrahlung reichen zwei Messwerte. Ein iteratives Lösungsverfahren für diesen Fall ist in [14] angegeben, wobei einige zusätzliche vereinfachende Annahmen getroffen wurden.

In der Praxis sind die spektralen Empfindlichkeiten des Messsystems oft nicht genau bekannt. Um die Materialzuordnungsfunktionen $F_i(\bar{L}_F, \bar{L}_C, \bar{L}_P)$ direkt messen zu können, wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Kalibrierverfahren entwickelt, welches in Kapitel 4 vorgestellt wird.

2.1.2. Aufnahmegeometrie

Von der Betrachtung der Schwächung und der Detektion eines einzelnen Primärstrahls wird zur Betrachtung eines Durchstrahlungsbildes übergegangen. Ein Durchstrahlungsbild ergibt sich durch die Detektion einer Vielzahl von Primärstrahlen. Die Geraden, auf denen sich diese Strahlen befinden, werden als **Projektionsgeraden** bezeichnet. Die genaue Lage der einzelnen Detektoren auf den Projektionsgeraden ist unwesentlich, da die in einem Grauwert enthaltene Information direkt mit dem Linienintegral entlang der Projektionsgeraden verbunden ist.

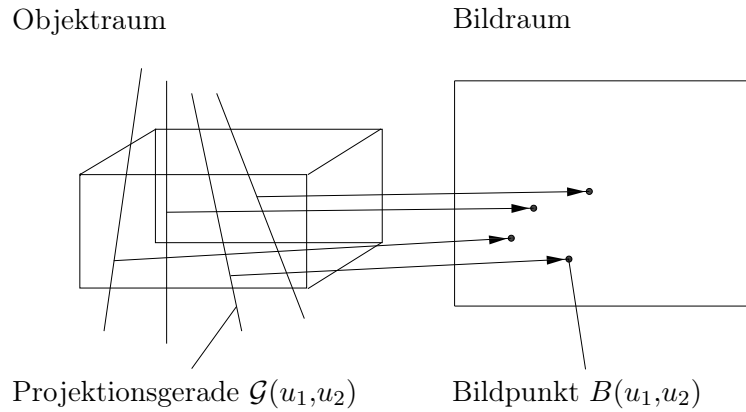


Abbildung 2.8.: Aufnahmegeometrie: Die Aufnahmegeometrie entspricht der Zuordnung der Projektionsgeraden zu den Bildpunkten

Es seien $B(u_1, \dots, u_m)$ die Bildpunkte eines m -dimensionalen Durchstrahlungsbildes mit den Parametern $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}$. Die Zuordnung der Bildpunkte $B(u_1, \dots, u_m)$ zu ihren Projektionsgeraden

$$\mathcal{G}(u_1, \dots, u_m) := \{\mathbf{q}(u_1, \dots, u_m) + t\mathbf{n}(u_1, \dots, u_m) | t \in \mathbb{R}\} \quad (2.34)$$

wird als **Aufnahmegeometrie** bezeichnet. Der Punkt mit dem Ortsvektor $\mathbf{q}(0, \dots, 0)$ heißt **Basisquelle**. Die Projektionsgerade $\mathcal{G}_B := \mathcal{G}(0, \dots, 0)$ heißt **Basisgerade**. Die Geradengleichung der Projektionsgeraden lautet

$$\mathbf{p}(u_1, \dots, u_m, t) = \mathbf{q}(u_1, \dots, u_m) + t\mathbf{n}(u_1, \dots, u_m). \quad (2.35)$$

Da es die mathematische Beschreibung der Aufnahmegeometrien vereinfacht, wird auf die Forderung verzichtet, dass der Richtungsvektor $\mathbf{n}(u_1, \dots, u_m)$ der Projektionsgeraden normiert sein muss. Es ist also möglich, dass $|\mathbf{n}(u_1, \dots, u_m)| \neq 1$. Die Linienintegrale $L(u_1, \dots, u_m)$ aus Gleichung (2.24) werden in diesem Fall zu

$$L(u_1, \dots, u_m) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\mathbf{p}(u_1, \dots, u_m, t)) |\dot{\mathbf{p}}(u_1, \dots, u_m, t)| dt, \quad (2.36)$$

wobei $\dot{\mathbf{p}}$ die Ableitung von \mathbf{p} nach t bezeichnet. Im Folgenden wird wie in Gleichung (2.36) von der konkreten Form des Schwächungskoeffizienten abstrahiert. Als Aufnahmegeometrien werden in dieser Arbeit die Parallelstrahlgeometrie und die Fächerstrahlgeometrie betrachtet.

Zweidimensionale Parallelstrahlgeometrie

Für die Darstellung der prinzipiellen Zusammenhänge ist die Betrachtung von Objekten im zweidimensionalen Raum ausreichend. Bei Betrachtung von Objekten im zweidimensionalen Raum ergeben sich eindimensionale Projektionsbilder.

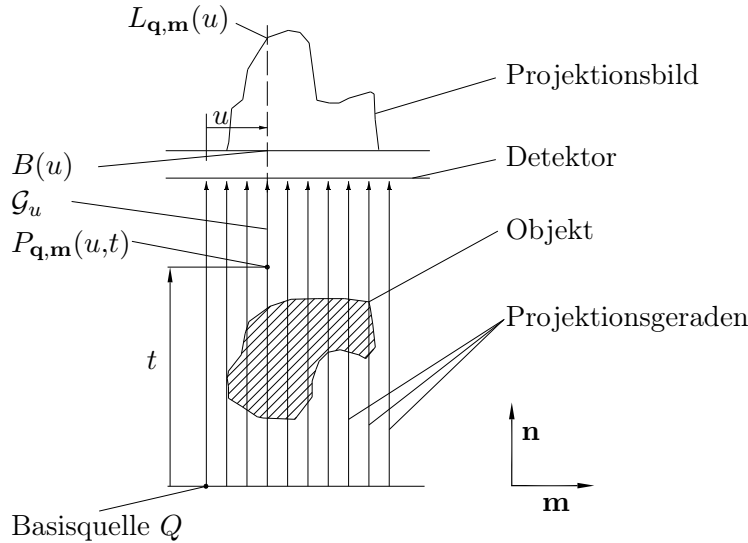


Abbildung 2.9.: Parallelprojektion

Die Geradengleichung für die Projektionsgerade $\mathcal{G}(u)$ zum Bildpunkt $B(u)$ lautet

$$\mathbf{p}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(u,t) := \mathbf{q} + u\mathbf{m} + t\mathbf{n}, \quad t, u \in \mathbb{R}, \quad (2.37)$$

wobei \mathbf{q} der Ortsvektor der Basisquelle Q ist. Der Vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$ gibt die Richtung der Projektionsgeraden an, $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^2$ ist ein zu \mathbf{n} orthogonaler Vektor. Beide Vektoren seien orthonormiert, es gilt also

$$|\mathbf{m}| = 1, \quad |\mathbf{n}| = 1, \quad \mathbf{m} \circ \mathbf{n} = 0. \quad (2.38)$$

Aus den Grauwerten des Bildpunktes $B(u)$ ergeben sich, wie in Abschnitt 2.1.1 beschrieben, die Werte der Linienintegrale $L_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(u)$ entlang der Projektionsgeraden \mathcal{G}_u . Dies ist in Abbildung 2.9 dargestellt. Aus den Gleichungen (2.36) und (2.37) ergibt sich in Übereinstimmung mit der bekannten Radontransformation [15]

$$L_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(u) := \int_{\mathbb{R}} \mu(\mathbf{p}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(u,t)) |\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(u,t)| dt. \quad (2.39)$$

Wegen Gleichung (2.37) gilt $\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(u,t) = \mathbf{n}$ und somit $|\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(u,t)| = |\mathbf{n}| = 1$. Damit wird aus Gleichung (2.39)

$$L_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(u) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\mathbf{p}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(u,t)) dt. \quad (2.40)$$

Fächerschargeometrie

Die Fächerschargeometrie dient zur Beschreibung von Banddurchstrahlungsanlagen, welche in Abbildung 2.10 dargestellt sind.

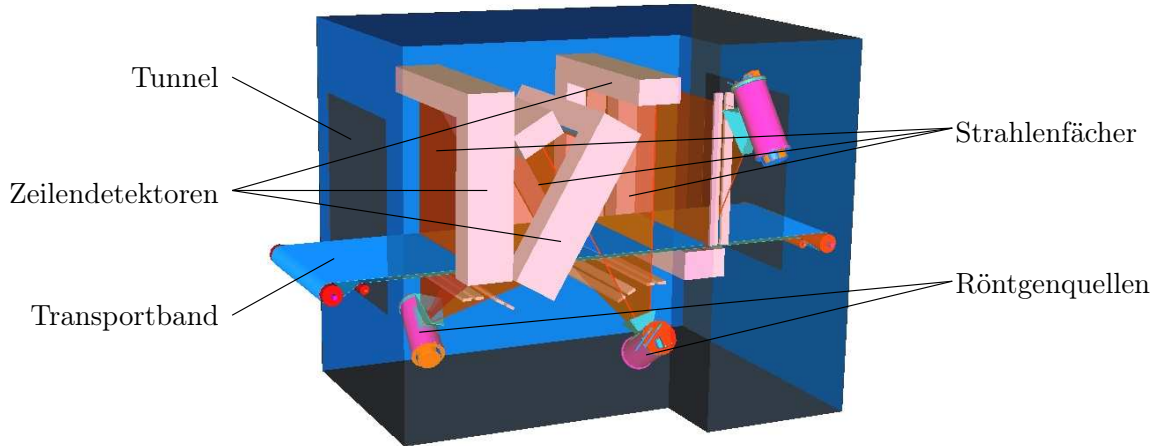


Abbildung 2.10.: Schema einer Gepäckprüfanlage der Stufe 1

Den nachfolgenden Ausführungen werden einige Begriffsdefinitionen vorangestellt. Ein **Fächer** ist die Menge aller Geraden, die einen Punkt Q enthalten und eine Kurve K schneiden. Der Punkt Q heißt **Fächerspitze**, die Kurve K **Detektorlinie** und die einzelnen Geraden des Fächers sind die Projektionsgeraden. Liegt der Fächer komplett in einer Ebene, so heißt er **ebener Fächer**. Durch Parallelverschiebung des Fächers entlang einer Führungsgeraden erhält man, wie in Abbildung 2.11 dargestellt, eine **Fächerschar**. Eine **Fächerscharprojektion** ist die Abbildung, die den einzelnen Projektionsgeraden der Fächerschar den Wert ihres Linienintegrals zuordnet. Ist die Detektorlinie eine Gerade, so heißt sie **Detektorgerade**. Der Fächer, der die Basisgerade enthält, heißt **Basisfächer**.

Die diskrete Aufnahmegeometrie einer Banddurchstrahlungsanlage lässt sich durch eine Fächerschargeometrie beschreiben, indem die einzelnen Detektorpunkte durch Geradenstücke zu einer Linie verbunden werden. Das diskrete Projektionsbild wird dabei in geeigneter Weise in ein kontinuierliches Bild umgerechnet. Die Aufnahmegeometrie entspricht annähernd einer ebenen Fächerschargeometrie, jedoch liegen die einzelnen Projektionsgeraden auf Grund von Positionierungsungenauigkeiten nur näherungsweise in einer Ebene.

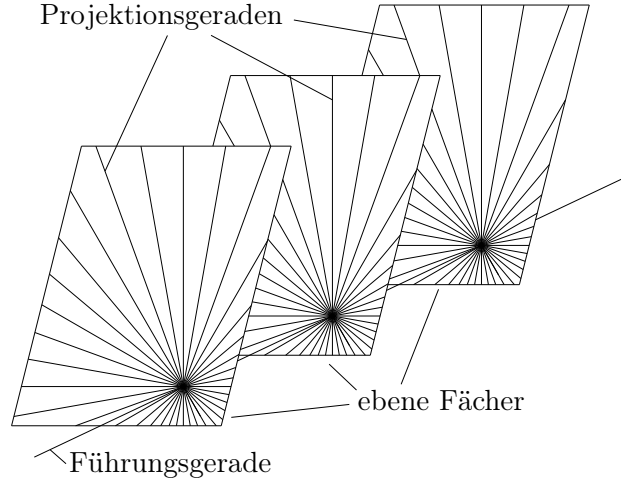


Abbildung 2.11.: Fächerschar

Ein Punkt $P(u,v,t)$ mit dem Ortsvektor $\mathbf{p}_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},af}(u,v,t)$ der zu den Bildpunkten $B(u,v)$ gehörenden Projektionsgeraden $\mathcal{G}(u,v)$ ist durch

$$\mathbf{p}_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},af}(u,v,t) := \mathbf{q} + v\mathbf{n} + t\mathbf{r} + ut\mathbf{a}\mathbf{f}, \quad u,v,t \in \mathbb{R} \quad (2.41)$$

beziehungsweise

$$\begin{pmatrix} p_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},af}1 \\ p_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},af}2 \\ p_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},af}3 \end{pmatrix} (u,v,t) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1 & r_1 & af_1 \\ n_2 & r_2 & af_2 \\ n_3 & r_3 & af_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ t \\ ut \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

gegeben (Abbildung 2.12). Dabei ist $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ der Ortsvektor der Basisquelle, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ der Richtungsvektor der Führungsgeraden, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$ der Richtungsvektor der Detektorgeraden und $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$ der Richtungsvektor der Basisgeraden.

Der Parameter a legt die Detektorebene $\mathcal{D} := \{\mathbf{p}_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},af}(u,v,t) | u,v \in \mathbb{R}, t = a^{-1}\}$ fest. Der Abstand zweier Punkte $P(u_1, v_1, a^{-1})$ und $P(u_2, v_2, a^{-1})$ der Detektorebene entspricht dem Abstand der zugehörigen Bildpunkte $B(u_1, v_1)$ und $B(u_2, v_2)$. Die durch die Messung der Grauwerte des Bildpunktes $B(u,v)$ bestimmbaren Linienintegrale sind

$$L_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},af}(u,v) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\mathbf{p}_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},af}(u,v,t)) |\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},af}(u,v,t)| dt. \quad (2.43)$$

Aus Gleichung (2.42) folgt $\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},af}(u,v,t) = \mathbf{r} + u\mathbf{a}\mathbf{f}$ und damit $|\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},af}(u,v,t)| = |\mathbf{r} + u\mathbf{a}\mathbf{f}|$. In Gleichung (2.43) eingesetzt ergibt dies

$$L_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},af}(u,v) = |\mathbf{r} + u\mathbf{a}\mathbf{f}| \int_{\mathbb{R}} \mu(\mathbf{p}_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},af}(u,v,t)) dt. \quad (2.44)$$

2.2. Momente von Objekt und Bild

Momente sind mathematische Größen, welche zur Beschreibung von Verteilungen eingesetzt werden. Es werden Momente nullter, erster und N -ter Ordnung definiert. Sie werden zum Beispiel in

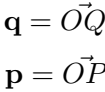


Abbildung 2.12.: Fächerscharkoordinatensystem

der Mechanik zur Beschreibung der Bewegung starrer Körper verwendet [16]. Das nullte Moment der Massedichteverteilung $\rho(\mathbf{x})$ eines Objektes entspricht der Masse m des Objektes:

$$m = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (2.45)$$

Aus den Momenten $\int_{\mathbb{R}^3} x_i \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$ erster Ordnung lassen sich die Koordinaten $\mathbf{x}_{(s)i}$ des Schwerpunktes eines Objektes mittels

$$\mathbf{x}_{(s)i} = \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}^3} x_i \rho(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (2.46)$$

berechnen. Die Massenträgheitsmomente eines Objektes sind Momente zweiter Ordnung. Sie sind definiert als

$$J_{11} = \int_{\mathbb{R}^3} (x_2^2 + x_3^2) \rho(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad (2.47)$$

und

$$J_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} -x_i x_j \rho(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.48)$$

Für J_{22} und J_{33} gelten Gleichungen analog zu (2.47).

In der Statistik werden Momente zur Beschreibung der Verteilung von Zufallsvariablen verwendet. Nach [17] ist für eine r -dimensionale Zufallsvariable $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$ das (k_1, \dots, k_r) -te Moment definiert als

$$m_{k_1, \dots, k_r}(a_1, \dots, a_r) := E((\bullet_1 - a_1)^{k_1} \dots (\bullet_r - a_r)^{k_r}) \quad (2.49)$$

mit

$$E(g(\mathbf{x})) = \int_{\mathbb{R}^r} g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d^r \mathbf{x}, \quad (2.50)$$

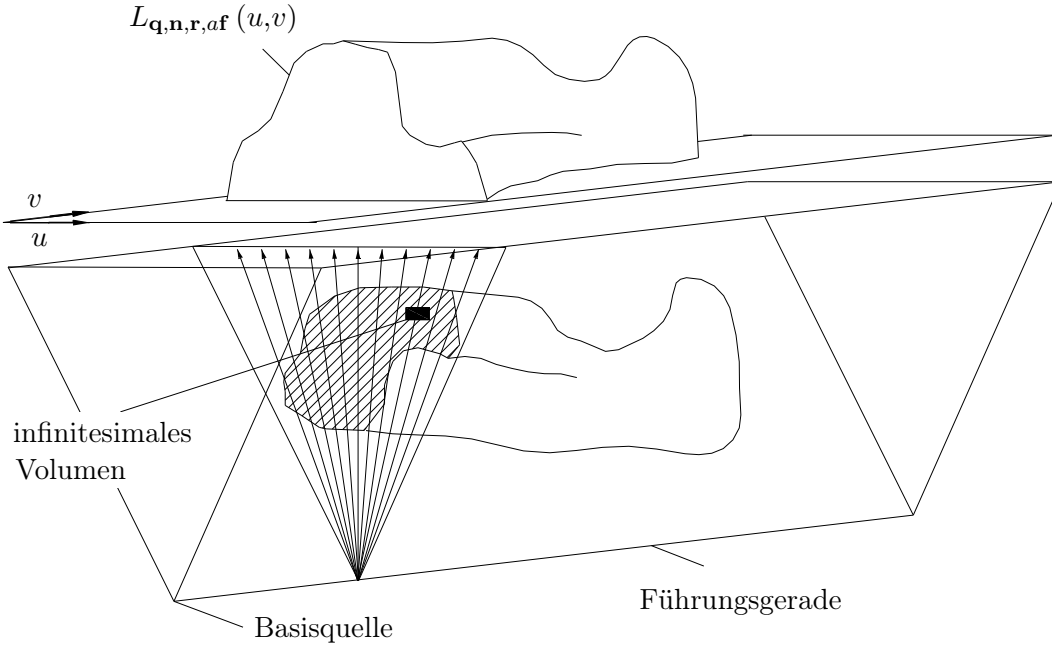


Abbildung 2.13.: Fächerscharprojektion

wobei $f(\mathbf{x})$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Dabei wird in dieser Arbeit das Symbol \bullet_r als Platzhalter für den r -ten Parameter einer Funktion verwendet. Demzufolge entsprechen sich zum Beispiel die Definitionen $g := \bullet_1 \bullet_2^2$ und $g(x,y) := xy^2$. Hier entsprechen die Momente erster Ordnung den Erwartungswerten

$$m_i(0) = \int_{\mathbb{R}^r} x_i f(\mathbf{x}) d^r \mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (2.51)$$

Für die Momente zweiter Ordnung gilt:

$$m_{i,j}(0,0) = \int_{\mathbb{R}^r} x_i x_j f(\mathbf{x}) d^r \mathbf{x}. \quad (2.52)$$

Den Momenten der Massedichteverteilung und den statistischen Momenten ist gemeinsam, dass jeweils ein Polynom in x_1, x_2, \dots, x_r mit einer Dichtefunktion $\rho(\mathbf{x})$ beziehungsweise $f(\mathbf{x})$ multipliziert und anschließend integriert wird. In dieser Arbeit werden die Momente der dreidimensionalen Schwächungskoeffizientenverteilung $\mu(\mathbf{x})$ eines Objektes und der zweidimensionalen Grauwertverteilung $L(u,v)$ eines Bildes betrachtet. Die Darstellung orientiert sich dabei an der Statistik, da die dort angegebene Definition allgemeiner ist. Die Schwächungskoeffizientenverteilung und die Grauwertverteilung sind als räumliche beziehungsweise ebene Verteilungen aber eher mit der Massedichteverteilung verwandt.

Die Momente eines Objektes sind eng mit seiner Lage verknüpft. Unter anderem aus diesem Grund sind die Momente für Positionswiederfindungsalgorithmen geeignet.

Angelehnt an die obigen Definitionen der Momente, aber zur Darstellung von geometrischen Zusammenhängen besser geeignet, werden in dieser Arbeit Momententensoren verwendet. Der Momententensor N -ter Ordnung der integrierbaren Verteilungsfunktion $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei die Funktion, welche den Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$ den Wert

$$M(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N) := \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\mathbf{x}) (\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{x}) \dots (\mathbf{a}_N \circ \mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \quad (2.53)$$

zuordnet. Im Folgenden wird der Raum der integrierbaren Funktionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R} mit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ bezeichnet. Die Werte des Momententensors für konkrete $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$ bezeichnet man als Momente N -ter Ordnung. Das Moment nullter Ordnung wird dazu passend definiert:

$$M = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}. \quad (2.54)$$

Die Bestimmung des Momententensors erster Ordnung

$$M(\mathbf{a}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\mathbf{x}) (\mathbf{a} \circ \mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \quad (2.55)$$

und des Momententensors zweiter Ordnung

$$M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\mathbf{x}) (\mathbf{a}_1 \circ \mathbf{x}) (\mathbf{a}_2 \circ \mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \quad (2.56)$$

sind in Abbildung 2.14 beziehungsweise in Abbildung 2.15 dargestellt.

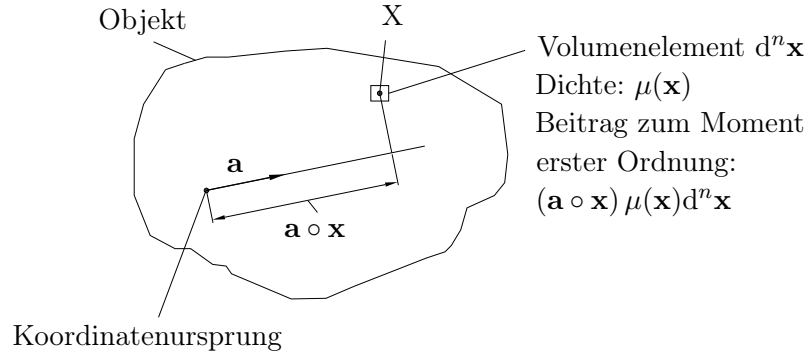


Abbildung 2.14.: Beitrag eines Volumenelementes zu einem Moment erster Ordnung

Die Koordinatendarstellung des Momententensors ist

$$M(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_N=1}^n a_{(1)i_1} \cdots a_{(N)i_N} M_{i_1 \dots i_N}, \quad (2.57)$$

wobei $M_{i_1 \dots i_N}$ mit

$$M_{i_1 \dots i_N} := M(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_N}) \quad (2.58)$$

das Moment der Basisvektoren darstellt und $a_{(j)i}$ die Koeffizienten des Vektors \mathbf{a}_j sind.

Speziell gilt für den Momententensor erster Ordnung

$$M(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n a_i M_i \quad (2.59)$$

und für den Momententensor zweiter Ordnung

$$M(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j M_{ij}. \quad (2.60)$$

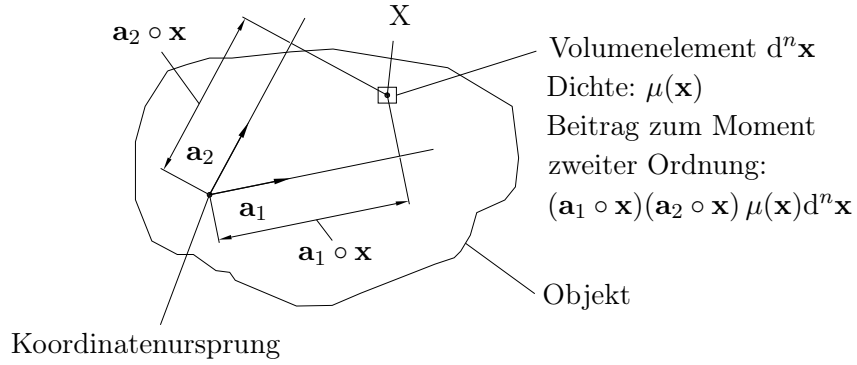


Abbildung 2.15.: Beitrag eines Volumenelementes zu einem Moment zweiter Ordnung

Des Weiteren werden die Momente $M_{\mathbf{q}}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N)$ um den Punkt Q mit dem Ortsvektor \mathbf{q} definiert durch

$$M_{\mathbf{q}}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N) := \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\mathbf{x}) (\mathbf{a}_1 \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})) \cdots (\mathbf{a}_N \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})) d^n \mathbf{x}. \quad (2.61)$$

Diese Momente lassen sich aus den Momenten $M(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N)$ um den Koordinatenursprung berechnen. Dies wird in Abschnitt 5.3 dargestellt.

Weitere geometrische Größen, die aus den Momententensoren berechnet werden können, sind der Schwerpunkt und das Momentenellipsoid. Der Schwerpunkt X_S ist der Punkt, dessen Ortsvektor \mathbf{x}_S das mit der Dichte $\mu(\mathbf{x})$ gewichtete Mittel der Ortsvektoren des Raumes ist, also

$$\mathbf{x}_S := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \mu(\mathbf{x}) \mathbf{x} d^n \mathbf{x}}{\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \mu(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}}_{=M}}. \quad (2.62)$$

Daraus folgt

$$\mathbf{x}_S \circ \mathbf{a} = \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\mathbf{x}) (\mathbf{x} \circ \mathbf{a}) d^n \mathbf{x} = \frac{1}{M} M(\mathbf{a}), \quad (2.63)$$

womit der Zusammenhang des Schwerpunktes zu den Momenten aufgezeigt ist. Mit Gleichung (2.59) folgt die Gleichung für den Schwerpunkt

$$\mathbf{x}_S = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_N \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

Alle Momente lassen sich in der Form

$$M(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N) := \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\mathbf{x}) f_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N}(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \quad (2.65)$$

darstellen, wobei $f_{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N}(\mathbf{x})$ eine das Moment charakterisierende Funktion, die **Momentenfunktion**, ist.

Das Momentenellipsoid \mathcal{V} zur Verteilungsfunktion $\mu \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ sei das Ellipsoid, welches bei homogener Dichte dieselben Momente nullter, erster und zweiter Ordnung hat wie die ursprüngliche Verteilungsfunktion. Es dient der Veranschaulichung aller Momente bis zweiter Ordnung.

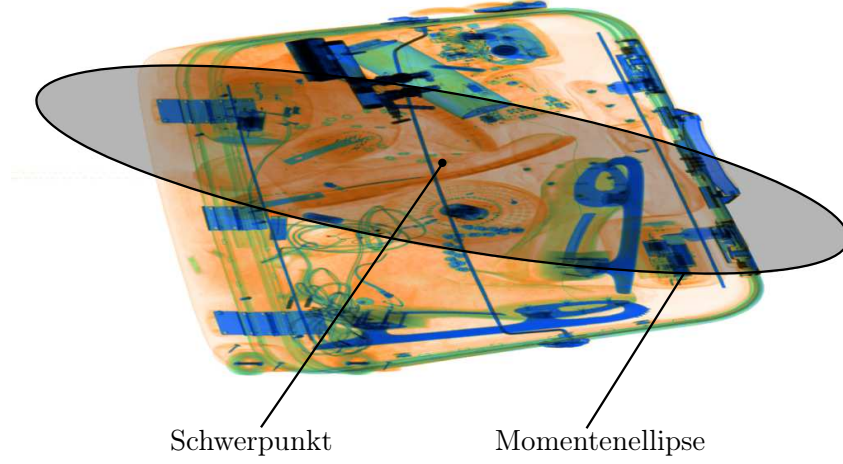


Abbildung 2.16.: Schwerpunkt und Momentenellipse einer Durchstrahlungsaufnahme. Zur Berechnung der Momente werden nur die Helligkeitswerte und nicht die Farbwerte verwendet.

Im zweidimensionalen Fall wird das Momentenellipsoid als Momentenellipse bezeichnet. Die Momentenellipse ist für ein Beispiel in Abbildung 2.16 gezeigt.

Die Dichte des Momentenellipsoids wird wie folgt festgelegt: Ist das Momentenellipsoid eine n -dimensionale Einheitskugel, so sei seine Dichte gleich dem Reziproken des Volumens ω_n der Einheitskugel dividiert durch n . Jedes Momentenellipsoid \mathcal{V} kann mittels einer linearen bijektiven Transformation $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf die Einheitskugel abgebildet werden, wobei sich seine Dichte $\mu_{\mathcal{V}}$ ändert.

Die Dichte des Momentenellipsoids wird so gewählt, dass sich bei Abbildung auf die Einheitskugel gerade die Dichte der Einheitskugel ergibt. Es gilt demzufolge $\mu_{\mathcal{V}} = n \omega_n^{-1} |\det \mathbf{T}|$. Mit dieser Definition der Dichte gilt: Die Ausdehnung des Momentenellipsoids in Richtung \mathbf{a} mit $|\mathbf{a}| = 1$ beträgt $2\sqrt{M_{\mathbf{x}_S}(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 2.17 dargestellt.

Das Momentenellipsoid ist außerdem durch die Formel

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{x} : (\mathbf{x} - \mathbf{x}_S)^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) \leq 1\} \quad (2.66)$$

gegeben, wobei $\mathbf{M} := (M_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ die zum Momententensor zweiter Stufe zugehörige symmetrische Matrix ist.

Die beiden obigen Eigenschaften des Momentenellipsoids werden im Folgenden bewiesen, wobei sich der Beweis von Gleichung (2.66) auf die in Abschnitt 5.3 hergeleiteten Formeln für transformierte Dichteverteilungen stützt.

Zunächst wird die Ausdehnung des durch Gleichung (2.66) gegebenen Ellipsoids berechnet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit befinde sich der Schwerpunkt des Ellipsoids \mathcal{V} im Koordinatenursprung ($\mathbf{x}_S = \mathbf{0}$). Für Punkte auf der Oberfläche von \mathcal{V} gilt dann

$$\mathbf{x}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x} = 1. \quad (2.67)$$

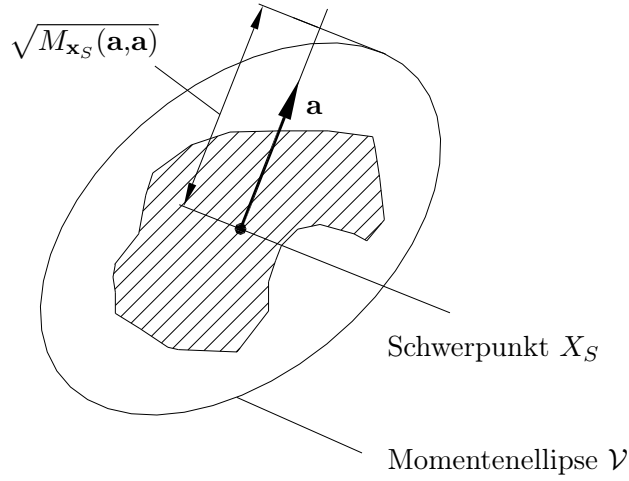


Abbildung 2.17.: Ausdehnung der Momentenellipse

Die Ausdehnung von \mathcal{V} in Richtung \mathbf{a} ergibt sich aus der Lösung von

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} \rightarrow \max! \quad \text{über} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x} = 1.$$

Diese Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung führt mit der Methode der *Lagrangeschen Multiplikatoren* [18] auf $\nabla(\mathbf{a}^T \mathbf{x}) = -\lambda \nabla(\mathbf{x}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x})$ mit dem Lagrangeschen Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $\mathbf{a} = -2\lambda \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}$ und anschließend

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{2\lambda} \mathbf{M} \mathbf{a}. \quad (2.68)$$

Aus Gleichung (2.67) und (2.68) folgt

$$1 = \frac{1}{4\lambda^2} \mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{a} = \frac{1}{4\lambda^2} \mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a}. \quad (2.69)$$

Damit ergibt sich $\lambda = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a}}$. Einsetzen in Gleichung (2.68) ergibt $\mathbf{x} = \pm 1 / \sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a}} \mathbf{M} \mathbf{a}$. Daraus folgt

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a}}} \mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a} = \pm \sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a}}. \quad (2.70)$$

Dabei ist $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ die Hälfte der Ausdehnung in Richtung \mathbf{a} .

Betrachtet werden die Momente der homogenen n -dimensionalen Einheitskugel $\mathcal{K}_n := \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq 1\}$ mit der Dichte $\mu_{\mathcal{K}_n}(\mathbf{x}) = n \omega_n^{-1}$ und dem Radius 1. Dabei ist

$$\omega_n := \frac{1}{n} \int_{\mathcal{K}_n} \mathbf{x}^T \mathbf{x} d\mathbf{x}, \quad n \geq 1. \quad (2.71)$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{K}_n} x_i^2 d\mathbf{x} = \omega_n \quad (2.72)$$

und aus Symmetriegründen gilt

$$\int_{\mathcal{K}_n} x_i^2 d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{K}_n} x_j^2 d\mathbf{x}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.73)$$

Aus den Gleichungen (2.71), (2.72) und (2.73) folgt

$$n \int_{\mathcal{K}_n} x_i^2 d\mathbf{x} = \omega_n, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.74)$$

Ebenfalls aus Symmetriegründen gilt

$$\int_{\mathcal{K}_n} x_i x_j d\mathbf{x} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.75)$$

Aus den Gleichungen (2.74) und (2.75) folgt $\mathbf{x}\mathbf{x}^T = \omega_n/n \mathbf{I}$. Nach Einsetzen in Gleichung (2.56) ergibt sich für die Einheitskugel \mathcal{K}_n mit der Dichte $\mu_{\mathcal{K}_n}(\mathbf{x}) = n \omega_n^{-1}$ der Momententensor

$$M_{\mathcal{K}_n}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^T \mathbf{a}. \quad (2.76)$$

Das Ellipsoid $\mathcal{V} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x} \leq 1\}$ wird durch die Koordinatentransformation $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ auf

$$\bar{\mathcal{V}} = \{\mathbf{T}\mathbf{x} : \mathbf{x}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x} \leq 1\} = \{\bar{\mathbf{x}} : \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{T}^{-T} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{x}} \leq 1\}$$

abgebildet. Da die Matrix \mathbf{M}^{-1} symmetrisch und positiv definit ist, lässt sie sich stets Cholesky-faktorisieren [19]. Im Folgenden wird der Fall betrachtet, dass die Transformationsmatrix \mathbf{T} gerade als der sich ergebende Cholesky-Faktor gewählt wird. Es gilt demzufolge:

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}. \quad (2.77)$$

Daraus folgt $\mathbf{T}^{-T} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I}$. Dies bedeutet, dass $\bar{\mathcal{V}} = \{\bar{\mathbf{x}} : \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{x}} \leq 1\}$ die Einheitskugel \mathcal{K}_n ist. Damit das Ellipsoid auf eine Einheitskugel mit der Dichte ω_n^{-1} abgebildet wird, muss das Ellipsoid \mathcal{V} die Dichte $\mu_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = \omega_n^{-1} |\det \mathbf{T}|$ besitzen (siehe Gleichung (5.86)). Für den Momententensor $M_{\mathcal{V}}$ der Ellipse \mathcal{V} gilt nach Gleichung (5.116)

$$M_{\mathcal{V}}(\mathbf{T}^T \mathbf{a}, \mathbf{T}^T \mathbf{a}) = M_{\mathcal{K}_n}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^T \mathbf{a}. \quad (2.78)$$

Für die zu diesem Momententensor gehörende Matrix $\mathbf{M}_{\mathcal{V}}$ gilt demzufolge $\mathbf{T} \mathbf{M}_{\mathcal{V}} \mathbf{T}^T = \mathbf{I}$. Daraus folgt $\mathbf{M}_{\mathcal{V}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T}^{-T}$. Mit Gleichung (2.77) ergibt sich $\mathbf{M}_{\mathcal{V}} = \mathbf{M}$. Das Ellipsoid \mathcal{V} hat also den korrekten Momententensor 2-ter Stufe.

3. Bekannte Verfahren

Verfahren zur Positionswiederfindung wurden zum Beispiel von Strecker [20] und von Alekseychuk [21–23] entwickelt. Das Verfahren von Strecker basiert auf einem Bildvergleich zwischen nur einem Projektionsbild der ersten Stufe und dem Projektionsbild der zweiten Stufe. Die Passpunktmethode von Alekseychuk verwendet die Lage einzelner Objekte des Gepäckstückes in einer 3D-Rekonstruktion und im Projektionsbild der zweiten Stufe.

3.1. Positionswiederfindung durch Bildvergleich

Das Verfahren von Strecker geht davon aus, dass jeweils nur ein Projektionsbild der ersten und zweiten Stufe vorhanden ist. Anhand dieser Bilder soll die Lageveränderung des Objektes bestimmt werden. Die Lageveränderungen werden dabei von vornherein auf eine Kombination der folgenden Lageveränderungen eingeschränkt:

- Beliebige Drehungen und Verschiebungen in der Bandedebene und
- Drehungen um 180° um eine in der Bandedebene liegende Achse (Umklappen).

Drehungen und Verschiebungen des Objektes in der Bandedebene haben Drehungen und Verschiebungen des Projektionsbildes und Drehungen um 180° um eine horizontale Achse haben näherungsweise eine Spiegelung des Bildes zur Folge.

Es wird die Kombination von Drehung, Verschiebung und Spiegelung des Projektionsbildes der ersten Stufe gesucht, die dieses am besten mit dem Projektionsbild der zweiten Stufe zur Deckung bringt. Der Vergleich der Bilder erfolgt zum Beispiel anhand der Differenz der Grauwerte oder anhand der Position von lokalen Merkmalen, wie Ecken, Kanten und Abbildungen kleiner Gegenstände.

Detailliert gibt Strecker das folgende Verfahren zur Positionswiederfindung in [20] an. Es werden die Schwerpunkte der Grauwertverteilungen beider Bilder bestimmt. Die Translation ergibt sich aus dem Unterschied dieser Schwerpunkte. Um den Rotationswinkel zu bestimmen, werden beide Bilder in N Sektoren um die Schwerpunkte unterteilt. Es werden statistische Kenngrößen des Histogramms der Grauwertverteilung für jeden Sektor berechnet. Die Differenz i der Sektorennummern, bei der die Vergleiche zwischen dem k -ten Sektor des Projektionsbildes der ersten Stufe und dem $(k + i)$ -ten Sektor des Projektionsbildes der zweiten Stufe die beste Übereinstimmung ergeben, legt den Rotationswinkel der zu ermittelnden Drehung fest. Falls einige Lageveränderungen ähnlich gute Vergleichswerte wie die am besten bewertete Lageveränderung aufweisen, werden diese als zusätzliche mögliche Lageveränderungen ausgegeben.

Anzumerken ist, dass zwar bei Parallelstrahl- und bei Kegelstrahlgeometrie eine Drehung des Objektes eine exakte Drehung des Bildes bewirkt, bei der Fächerschargeometrie aber Abweichungen infolge der unterschiedlichen Vergrößerungsfaktoren in Führungsgeradenrichtung und in Detektorgeradenrichtung auftreten. Der Nachteil des vorgestellten Verfahrens liegt in der Beschränkung der Lageveränderungen. Auf diese Weise werden von vornherein in der Praxis mögliche Lageveränderungen, wie das Umkippen eines Koffers oder das Rotieren einer Sporttasche um ihre

Längsachse, ausgeschlossen. Aus diesem Grund ist das Verfahren praktisch nur eingeschränkt nutzbar.

3.2. Positionswiederfindung mit der Passpunktmethode

Die Passpunktmethode [21–23] ist ein Verfahren zur Positionswiederfindung unter Ausnutzung lokaler Bild-Informationen. Der Algorithmus verwendet ein 3D-Rekonstrukt des Objektes und ein zusätzliches Projektionsbild, welches von der Maschine der zweiten Stufe erzeugt wird. Das 3D-Rekonstrukt wird mit der Minimumrekonstruktion mit vorheriger Binarisierung¹ erzeugt. Dabei wird nach der Binarisierung der Projektionsbilder jedem Voxel (Volumenzelle), der in allen Projektionsbildern in ein Pixel mit dem Wert 1 abgebildet wird, ebenfalls der Wert 1 zugeordnet. Genauere aber auch aufwändigere Rekonstruktionsverfahren, welche für die Rekonstruktion aus wenigen Projektionsbildern eingesetzt werden können, lassen sich [24] entnehmen. Es werden sowohl im 3D-Rekonstrukt als auch in dem Projektionsbild der zweiten Stufe markante Punkte gesucht. Diese werden im Folgenden Passpunkte genannt. Sie werden anhand von verschiedenen Merkmalen charakterisiert und anschließend einander zugeordnet. Mittels dieser Zuordnung wird dann die Lageveränderung bestimmt.

Es ist möglich, aus drei Passpunktpaaren die Lageveränderung des Objektes zu bestimmen. Dabei dürfen die drei Passpunkte des 3D-Rekonstrukts nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Der hier vorgestellte Algorithmus ist auf den Fall beschränkt, dass die Fächerebenen für die Maschine der zweiten Stufe orthogonal zur Führungsgeraden sind. Die Größen, welche die Aufnahmegeometrie der Maschine der zweiten Stufe beschreiben, sind

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D \end{pmatrix}, \quad a = 1/D, \quad (3.1)$$

wobei D der Abstand der Führungsgeraden zur Detektorebene ist. Gegeben sind die Ortsvektoren \mathbf{p}_i , $i = 1, 2, 3$ dreier Passpunkte P_i des Rekonstrukts der Maschine der ersten Stufe und die Koordinaten u_i und v_i der zugehörigen Passpunkte des Projektionsbildes der zweiten Stufe.

Es seien $\tilde{\mathbf{p}}_i$ die Ortsvektoren der Passpunkte des Objektes nach der Lageveränderung zwischen den beiden Maschinen. Diese Lageveränderung lässt sich durch die Rotationsmatrix \mathbf{Q} und den Verschiebevektor \mathbf{s} mit

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

beschreiben. Es gilt für die Koordinaten $\tilde{p}_{(i)j}$ von $\tilde{\mathbf{p}}_i$

$$\tilde{p}_{(i)j} = s_j + q_{j1}p_{(i)1} + q_{j2}p_{(i)2} + q_{j3}p_{(i)3}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

Nach Gleichung (5.45) berechnen sich die v -Koordinaten der Punkte zu

$$v_i = \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \circ (\tilde{\mathbf{p}}_i - \mathbf{q})}{\det(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{f})} = \tilde{p}_{(i)2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.4)$$

Durch Einsetzen der Gleichung (3.3) in Gleichung (3.4) ergibt sich

$$s_2 + q_{21}p_{(i)1} + q_{22}p_{(i)2} + q_{23}p_{(i)3} = v_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

¹Binarisierung: Umwandlung eines Grauwertbildes in ein Bild mit nur zwei Grauwerten mittels einer Schwellwertoperation.

Aufgrund der Orthogonalität von \mathbf{Q} gilt

$$q_{21}^2 + q_{22}^2 + q_{23}^2 = 1. \quad (3.6)$$

Das lineare Gleichungssystem (3.5) besitzt im Fall dreier nichtkollinearer Punkte P_1, P_2, P_3 eine eindimensionale Lösungsmenge. Zusammen mit Gleichung (3.6) ergibt sich ein nichtlineares Gleichungssystem, welches algebraisch äquivalent zum Problem der Bestimmung der Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kugel ist und sich deshalb leicht und schnell lösen lässt.

Nach Gleichung (5.45) berechnen sich die u -Koordinaten der Punkte unter Verwendung von Gleichung (3.1) nach

$$u_i = \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \circ (\tilde{\mathbf{p}}_i - \mathbf{q})}{a(\mathbf{f} \times \mathbf{n}) \circ (\tilde{\mathbf{p}}_i - \mathbf{q})} = \frac{\tilde{p}_{(i)1}}{1 - D^{-1}\tilde{p}_{(i)3}}. \quad (3.7)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (3.3) in Gleichung (3.7) folgt

$$u_i = \frac{s_1 + q_{11}p_{(i)1} + q_{12}p_{(i)2} + q_{13}p_{(i)3}}{1 - D^{-1}s_3 - D^{-1}q_{31}p_{(i)1} - D^{-1}q_{32}p_{(i)2} - D^{-1}q_{33}p_{(i)3}}. \quad (3.8)$$

Durch Umstellen dieser Gleichung ergeben sich drei lineare Gleichungen für die Größen s_1, s_3 und $q_{11}, \dots, q_{13}, q_{31}, \dots, q_{33}$. Für die Rotationsmatrix \mathbf{Q} wird eine Darstellung durch Eulerwinkel

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \sin \gamma + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta \\ -\cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \\ \cos \gamma \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma & \sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

verwendet [22].

Durch die bereits bestimmten q_{21}, \dots, q_{23} sind die Winkel α und γ festgelegt. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in Gleichung (3.8) ergeben sich drei lineare Gleichungen für die Größen $\sin \beta, \cos \beta, s_1$ und s_3 . Zusammen mit der Gleichung $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ ergibt dies ein einfach zu lösendes nichtlineares Gleichungssystem.

Der entwickelte Algorithmus ermöglicht eine schnelle und zuverlässige Bestimmung der Lageveränderung aus nur drei Zuordnungen von Passpunktpaaren. Der Algorithmus erkennt den Fall, dass für gegebene Passpunktpaare keine mögliche Lageveränderung existiert oder aufgrund der Kollinearität der Passpunkte keine Lageveränderung berechnet werden kann.

Um das benötigte Tripel von Passpunktpaaren zu bestimmen, wird wie folgt vorgegangen:

- Es wird eine Menge von Objekten sowohl im Rekonstrukt als auch im Projektionsbild bestimmt. Die Objekte werden durch einen zentralen Punkt, den Passpunkt, und weitere Eigenschaften charakterisiert. Eine einfache Eigenschaft ist die Größe des Objektes.
- Es wird eine Liste der möglichen Paare gebildet. Dabei wird jedem Paar anhand der Charakteristika der beiden Punkte eine bestimmte Plausibilität zugeordnet. Die Liste wird nach absteigender Plausibilität sortiert.
- Es werden Tripel aus Punktpaaren gebildet und getestet. Dabei wird mit den Punktpaaren mit der höchsten Plausibilität begonnen. Bei negativem Testergebnis werden diese sukzessive durch Punktpaare mit einer geringeren Plausibilität ersetzt. Die Prüfung der aus dem Tripel gewonnenen Lagetransformation erfolgt durch Vergleich der simulierten Projektion der Passpunkte des Rekonstrukts mit den Passpunkten des Projektionsbildes. Dabei werden die Abstände der projizierten Passpunkte zu dem jeweils nächstgelegenen Passpunkt des Projektionsbildes berechnet und anschließend summiert, wobei Ausreißer weggelassen werden.

Es ist zu bemerken, dass ein Prüfen aller Kombinationen für die Tripel aus Punktpaaren in der Regel aus Zeitgründen nicht möglich ist, da es zu viele Kombinationen gibt. So gibt es zum Beispiel bei 20 Passpunkten des Rekonstrukts und 10 Passpunkten des Projektionsbildes $20 \cdot 10 = 200$ verschiedene Passpunktpaare. Daraus lassen sich $\frac{200!}{3!(200-3)!} = 1\,313\,400$ verschiedene Tripel von Passpunktpaaren bilden. Da nicht alle Kombinationen getestet werden können, beginnt der obige Algorithmus mit den plausibelsten Kombinationen und wird nach Ablauf einer vorgegebenen Zeitspanne abgebrochen.

Es lassen sich in dem Algorithmus auch a-priori-Informationen über die Lageveränderung berücksichtigen, wie sie zum Beispiel mit einem anderen Positionswiederfindungsalgorithmus gefunden wurden. Dazu werden unter Verwendung der so ermittelten Lageveränderung a-priori-Bildkoordinaten der Projektionen der Passpunkte des Objektes simuliert. Der Abstand zwischen einem Passpunkt des Projektionsbildes und diesen a-priori-Bildpunkten geht in die Plausibilität dieser Passpunktpaare ein.

Es wurde ein Computerprogramm zur Positionswiederfindung mit der Passpunktmethode entwickelt. Dieses Programm wurde anhand eines simulierten Beispiels eines künstlichen Testobjektes (Winkelplatte) sowie eines realen Gepäckstückes getestet. Die ermittelte Lageveränderung wurde mit der wirklichen Lageveränderung anhand des Lageunterschiedes von zwölf gleichmäßig über den Objektraum verteilten Punkten ermittelt. Der mittlere und der maximale Abstand zwischen Ist- und Sollwert dieser Punkte sind für die getesteten Beispiele in Tabelle 3.1 dargestellt.

Testszene	mittlere Abweichung[mm]	maximale Abweichung[mm]
simulierte Szene	1,3	2,1
Winkelplatte	11,3	17,0
Koffer	4,7	5,9

Tabelle 3.1.: Genauigkeit der Positionswiederfindung mit der Passpunktmethode

Diese Beispiele zeigen das Potential des Algorithmus, wenn die zueinander passenden Passpunkte zur Verfügung stehen. Um geeignete Passpunkte zu finden, musste eine Reihe von Steuerparametern zur Passpunktdetektion an die jeweiligen Beispiele manuell angepasst werden. Der Algorithmus ist demzufolge derzeit nicht in der Lage, die Detektion und Charakterisierung der Passpunkte für die Vielfalt der möglichen Gepäckstücke automatisch, zuverlässig und in einer für die praktische Anwendung akzeptablen Zeit zu leisten. Er ist somit derzeit nicht in der Praxis einsetzbar.

Bei der Wahl der Steuerparameter sind zwei gegenläufige Tendenzen zu beobachten. Einerseits ist die Detektion größerer Objekte zuverlässiger und das Finden der korrekten Punktpaartripel einfach. In diesem Fall ist die Lagebestimmung der Passpunkte ungenau, da die Rekonstruktion der zugehörigen Objekte aus einer nur geringen Anzahl von Projektionsbildern keine genauen Ergebnisse liefert. Andererseits ist die Detektion von kleineren und nur kugelförmigen Passpunkten genauer und ermöglicht eine genaue Lagebestimmung. Da sich die Charakteristika der Passpunkte kaum unterscheiden, ist das Finden der korrekten Punktpaartripel aufwändig.

Der Positionswiederfindungsalgorithmus mittels Passpunktmethode ist unter der Voraussetzung der Detektion geeigneter Passpunkte in der Lage, die Lageveränderung genau zu bestimmen. Dabei können die Ergebnisse anderer Positionswiederfindungsalgorithmen verwendet werden. Zum praktischen Einsatz der Methode muss noch ein zuverlässiges Verfahren zur Detektion der Passpunkte gefunden werden.

4. Entwicklung von Kalibrierverfahren

Die mittels einer Dual-Energie-Mehrwinkel-Banddurchstrahlungsanlage aufgenommenen Bilder dienen als Grundlage für die Positionswiederfindung. Es ist erforderlich, eine Geometriekalibrierung zur genauen Ermittlung der Aufnahmegeometrie und eine Materialkalibrierung zur Bestimmung des Einflusses des Materials des untersuchten Objektes auf die Aufnahmen durchzuführen. Sowohl für die Geometriekalibrierung als auch für die Materialkalibrierung wurde jeweils ein neues Verfahren entwickelt.

4.1. Geometriekalibrierung

Die Genauigkeit der Positionswiederfindung wird durch die Genauigkeit der verwendeten Aufnahmegeometrie begrenzt. Der Zweck der Geometriekalibrierung besteht darin, die Aufnahmegeometrie möglichst genau zu ermitteln. Der Geometriekalibrierung liegt der Ansatz zugrunde, dass jedem Pixel des Bildes jeweils eine Projektionsgerade zugeordnet ist. Das Finden dieser Geraden, die dem Verlauf der Röntgenstrahlen entsprechen, ist Inhalt der Geometriekalibrierung.

Aufbau des Geometriekalibrierkörpers

Für das hier vorgestellte Verfahren wurde ein Geometriekalibrierkörper entwickelt, dessen Aufbau in Abbildung 4.1 schematisch dargestellt ist. Der Kalibrierkörper ist für die Kalibrierung von Mehrwinkel-Banddurchstrahlungsanlagen mit einer Tunnelbreite von ungefähr 104 cm und einer Tunnelhöhe von ca. 45 cm ausgelegt.

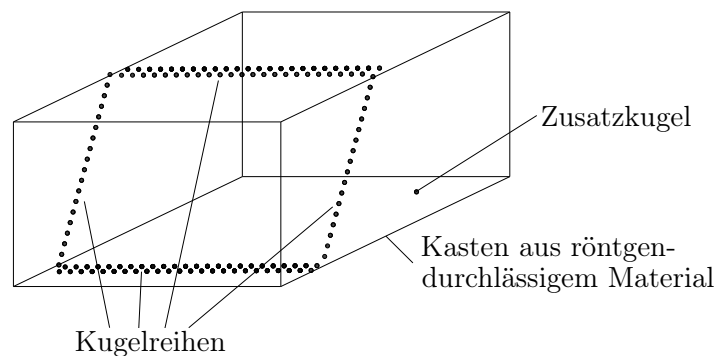


Abbildung 4.1.: Prinzipskizze des Geometriekalibrierkörpers

Er besteht aus einem Kasten aus dem für Röntgenstrahlen gut durchlässigen Makrolon, in welches Stahlkugeln mit 3 mm Durchmesser eingebracht sind. Letztere sind in mehreren Reihen angeordnet, zwei parallele Reihen (Doppelreihe) in der Bodenplatte, zwei parallele Reihen in der Deckplatte und je eine Reihe in der linken und der rechten Seitenplatte des Kalibrierkörpers. Der Abstand zwischen benachbarten Kugeln wurde so gewählt, dass in den Durchstrahlungsaufnahmen des Kalibrierkörpers die Anzeigen der Stahlkugeln (deren Projektionsbilder) einerseits dicht

zusammen liegen und andererseits noch gut zu trennen sind. Durch die rechteckige Kugelreihen-anordnung wird erreicht, dass jeder zu kalibrierende Strahl jeweils einer Kugelanzeige aus zwei verschiedenen Reihen zugeordnet werden kann. In der Bodenplatte befinden sich in Höhe der Doppelreihe und in großem Abstand zu dieser noch weitere Kugeln. Diese dienen der Messung der Führungsgeradenrichtung und der Auflösung des Bildes in dieser Richtung. Die Kalibrierung erfolgt anhand der Durchstrahlungsaufnahmen (Abbildung 4.2) des Geometriekalibrierkörpers.

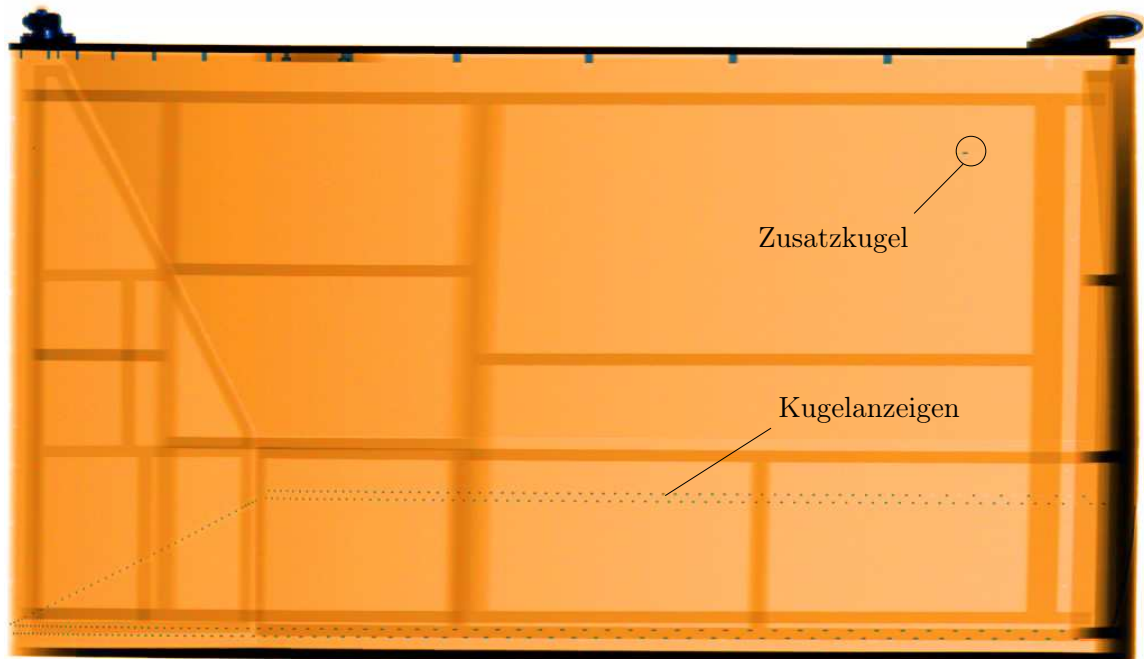


Abbildung 4.2.: Durchstrahlungsaufnahme des Geometriekalibrierkörpers

Die Auswertung besteht aus den folgenden Schritten:

- Bestimmung der Lage der Kugelanzeigen aus dem Bild
- Bestimmung der Führungsgeradenrichtung
- Bestimmung der Auflösung des Bildes in Führungsgeradenrichtung
- Bestimmung von zwei Punkten pro Projektionsgerade
- Verbesserung der Kalibrierung durch Einbeziehung von a-priori-Wissen

Mit einem an der BAM entwickelten Programm werden die Kugelanzeigen aus den Bildern extrahiert und die Schwerpunkte ihrer jeweiligen Grauwertverteilung bestimmt. Diese Schwerpunkte werden als die Projektionsbilder der Mittelpunkte der Kugeln des Kalibrierkörpers aufgefasst. Den Punkten auf der Verbindungsgeraden zwischen zwei benachbarten Kugeln lassen sich durch lineare Interpolation Punkte auf der Verbindungsgeraden zwischen zwei benachbarten Kugelanzeigen zuordnen (Abbildung 4.3). Insbesondere findet man auf diese Weise auch Punkte des Geometriekalibrierkörpers, die näherungsweise auf die Mitten der Pixelspalten des Projektionsbildes abgebildet werden. Die interpolierten Punkte werden für das Objekt als virtuelle Kugeln und für das Bild als virtuelle Kugelanzeigen bezeichnet.

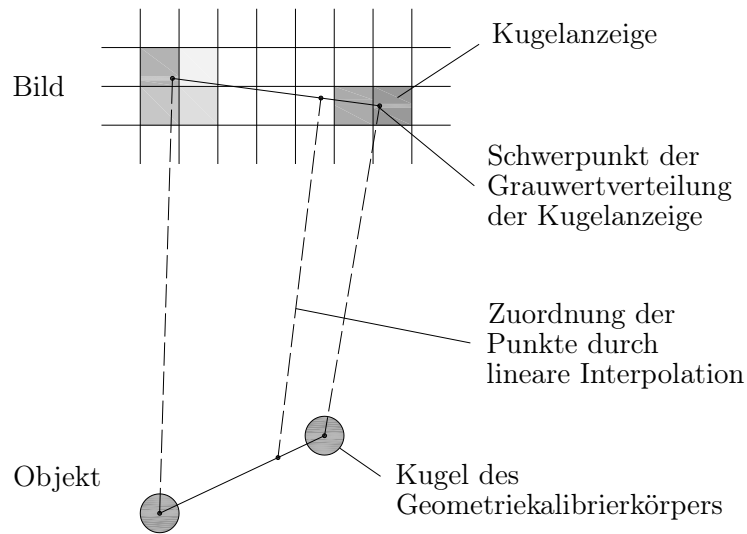


Abbildung 4.3.: Projektion interpolierter Punkte

Kalibrierungsalgorithmus

Der Geometriekalibrierkörper wird ohne genaue Lagebestimmung auf das Band gelegt. Die Position der Kugeln ist im körperfesten Koordinatensystem bekannt. Der Ursprung dieses Koordinatensystems liegt in der linken unteren Ecke des Geometriekalibrierkörpers. Seine Koordinatenachsen entsprechen den Kanten des Geometriekalibrierkörpers. In diesem Koordinatensystem wird die Kalibrierung durchgeführt. Die Ergebnisse werden in einem Koordinatensystem angegeben, welches nicht von der Lage des Geometriekalibrierkörpers abhängt.

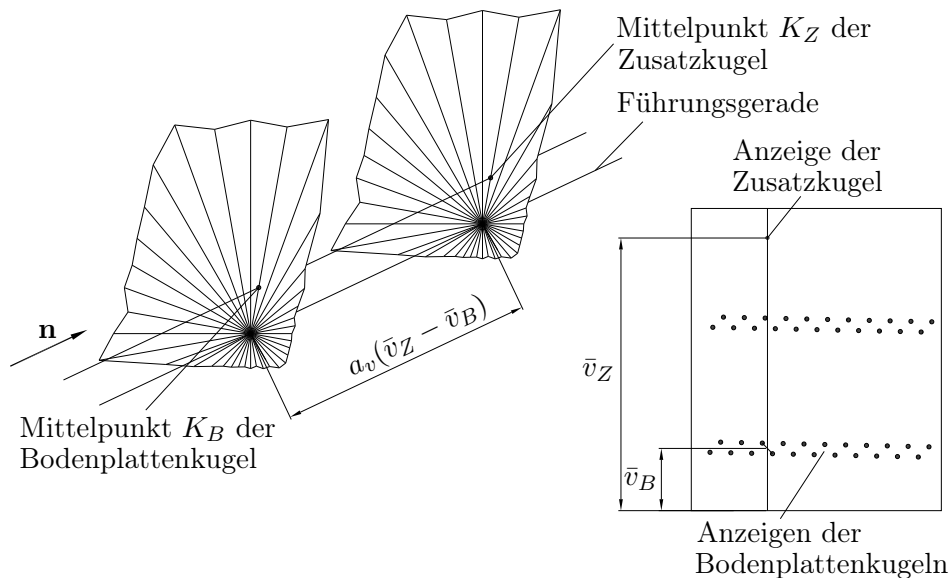


Abbildung 4.4.: Richtungsbestimmung der Führungsgeraden

Um die Führungsgeradenrichtung zu bestimmen, wird die virtuelle Kugel \mathcal{K}_B der Doppelreihe der Bodenplatte bestimmt, deren Anzeige in derselben Pixelspalte des Projektionsbildes wie die An-

zeige einer ebenfalls in der Bodenplatte befindlichen Zusatzkugel \mathcal{K}_Z liegt (siehe Abbildung 4.4). Die Ortsvektoren der Mittelpunkte der Kugeln \mathcal{K}_B und \mathcal{K}_Z seien \mathbf{k}_B beziehungsweise \mathbf{k}_Z .

Zwei Kugeln in derselben Höhe werden genau dann in dieselbe Pixelspalte des Bildes abgebildet, wenn ihre Verbindungsgerade parallel zur Führungsgerade ist. Der Abstand der Kugelmittelpunkte ergibt sich in diesem Fall aus dem Abstand der projizierten Kugelmittelpunkte in Pixeln, multipliziert mit der Auflösung a_v in Führungsgeradenrichtung \mathbf{n} . Es gilt also

$$\mathbf{k}_Z - \mathbf{k}_B = a_v(\bar{v}_Z - \bar{v}_B)\mathbf{n}, \quad (4.1)$$

wobei \bar{v}_Z, \bar{v}_B die v -Koordinaten der Punkte K_Z und K_B im Projektionsbild, gemessen in Pixeln, sind. Da $|\mathbf{n}| = 1$ gilt, ergibt sich aus dieser Formel die gesuchte Führungsgeradenrichtung

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}_Z - \mathbf{k}_B}{|\mathbf{k}_Z - \mathbf{k}_B|}. \quad (4.2)$$

Durch Skalarproduktbildung beider Seiten der Gleichung (4.1) mit \mathbf{n} und anschließendem Umstellen erhält man

$$a_v = \frac{(\mathbf{k}_Z - \mathbf{k}_B) \circ \mathbf{n}}{\bar{v}_Z - \bar{v}_B}. \quad (4.3)$$

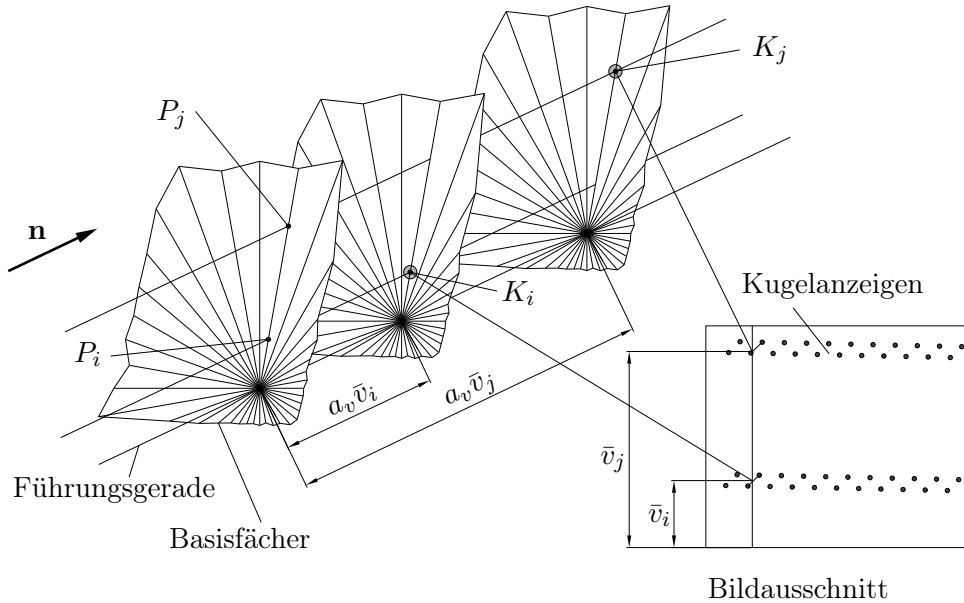


Abbildung 4.5.: Bestimmung zweier Punkte einer Projektionsgeraden

Betrachtet werden nun die N_K virtuellen Kugeln, welche auf die Mitten der Pixelspalten projiziert werden. Die Ortsvektoren der Mittelpunkte K_i dieser Kugeln seien \mathbf{k}_i , $i = 1, \dots, N_K$. Die v -Koordinaten der projizierten Kugelmittelpunkte seien \bar{v}_i , $i = 1, \dots, N_K$. Aus der Gleichung (2.41) folgt, dass \mathbf{k}_i der Ortsvektor eines Punktes einer Projektionsgeraden eines Fächers ist, welcher durch Verschiebung in Führungsgeradenrichtung um $a_v \bar{v}_i$ aus dem Basisfächer hervorgeht (Abbildung 4.5). Demzufolge sind

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{k}_i - a_v \bar{v}_i \mathbf{n}, \quad i = 1, \dots, N_K \quad (4.4)$$

die Ortsvektoren der Punkte P_i der entsprechenden Projektionsgeraden des Basisfächers. Da in jeder Reihe des Bildes zwei virtuelle Kugelanzeigen vorkommen, erhält man für jede Projektionsgerade des Basisfächers zwei auf ihr liegende Punkte, welche diese vollständig bestimmen. Damit ist eine Geometriekalibrierung erreicht.

Ausnutzen von a-priori-Wissen

Eine Verbesserung des Kalibrierungsergebnisses ist durch nachfolgende Betrachtungen zu erreichen: Die ermittelten Geraden treffen sich auf Grund von Mess- und Fertigungsungenauigkeiten nicht genau in einem Punkt. Es ist aber bekannt, dass die Projektionsgeraden des Basisfächers alle einen Punkt, die Fächerspitze gemeinsam haben. Bei Vorgabe dieser Bedingung ergibt sich das in Abbildung 4.6 dargestellte Näherungsproblem: Gesucht wird der Fächer, dessen Geraden einen möglichst geringen Abstand zu zwei vorgegebenen Punkten pro Gerade haben. Dieses Problem lässt sich bei näherungsweise bekannter Fächerspitze als Quadratmittelpunktproblem formulieren.

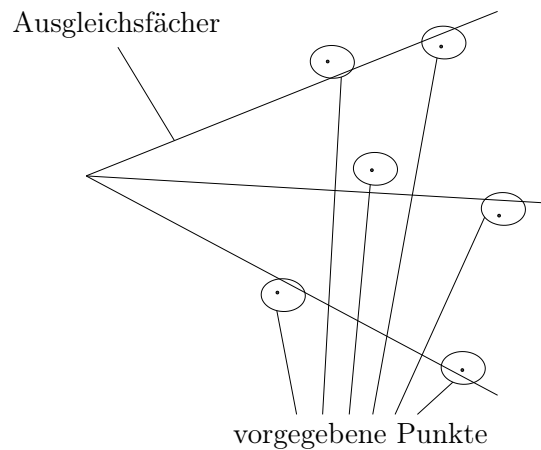


Abbildung 4.6.: Ausgleichsfächer

Das Näherungsproblem wird in die aufeinander aufbauenden Teilprobleme

- Finden einer Ausgleichsgeraden durch einen vorgegebenen Punkt (Fächerspitze),
- Bestimmen des Einflusses infinitesimaler Änderungen des vorgegebenen Punktes auf die Ausgleichsgerade und den zugehörigen Näherungsfehler (Abstandsquadratsumme),
- Bestimmen des Einflusses infinitesimaler Änderungen des vorgegebenen Punktes (Fächerspitze) durch Summation über die einzelnen Geraden und
- Lösen des Quadratmittelpunkts zur Bestimmung der Fächerspitze

zerlegt.

Zuerst wird untersucht, wie eine Ausgleichsgerade, bei welcher bereits ein Punkt Q festgelegt wurde, bestimmt werden kann. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird zunächst davon ausgegangen, dass der vorgegebene Punkt Q der Ausgleichsgerade mit dem Koordinatenursprung O zusammenfällt. Das Quadrat des Abstandes eines Punktes P von einer Geraden durch den Koordinatenursprung mit dem Richtungsvektor \mathbf{m} ergibt sich nach dem *Satz des Pythagoras* wie in Abbildung 4.7 ersichtlich zu

$$d_P^2(\mathbf{q} = 0, \mathbf{m}) = \mathbf{p}^2 - (\mathbf{p} \circ \mathbf{m})^2, \quad (4.5)$$

wobei \mathbf{p} der Ortsvektor zu P ist und $|\mathbf{m}| = 1$ gilt.

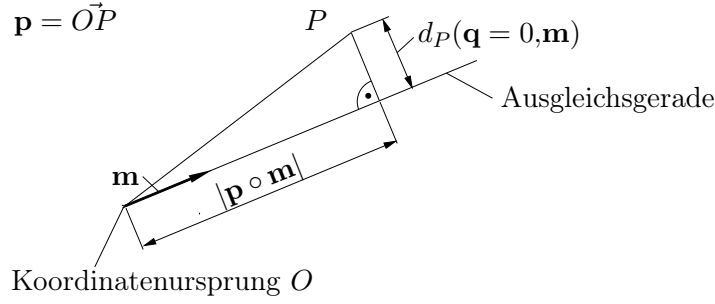


Abbildung 4.7.: Abstand $d_P(\mathbf{q} = 0, \mathbf{m})$ von P zur Ausgleichsgeraden

Der Einfluss von infinitesimalen Änderungen $\delta \mathbf{m}$ des Richtungsvektors \mathbf{m} auf das Abstandsquadrat wird im Folgenden untersucht. Für den geänderten Richtungsvektor $\bar{\mathbf{m}} := \mathbf{m} + \delta \mathbf{m}$ gilt $|\bar{\mathbf{m}}| = 1$. Daraus folgt

$$1 = (\mathbf{m} + \delta \mathbf{m}) \circ (\mathbf{m} + \delta \mathbf{m}) = \underbrace{\mathbf{m} \circ \mathbf{m}}_{=1} + 2\mathbf{m} \circ \delta \mathbf{m} + \underbrace{\delta \mathbf{m} \circ \delta \mathbf{m}}_{=0}, \quad (4.6)$$

wobei von nun an Terme, die quadratisch in infinitesimalen Größen sind, vernachlässigt werden. Aus Gleichung (4.6) folgt $\mathbf{m} \circ \delta \mathbf{m} = 0$.

Das Quadrat des Abstandes von P zur Geraden durch Q mit dem Richtungsvektor $\bar{\mathbf{m}}$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} d_P^2(0, \bar{\mathbf{m}}) &= \mathbf{p}^2 - (\mathbf{p} \circ (\mathbf{m} + \delta \mathbf{m})) (\mathbf{p} \circ (\mathbf{m} + \delta \mathbf{m})) \\ &= \mathbf{p}^2 - (\mathbf{p} \circ \mathbf{m})^2 - 2(\mathbf{p} \circ \mathbf{m})(\mathbf{p} \circ \delta \mathbf{m}) \quad \text{für } \delta \mathbf{m} \text{ mit } \mathbf{m} \circ \delta \mathbf{m} = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Damit erhält man für die Änderung des Abstandsquadrates

$$d_P^2(0, \bar{\mathbf{m}}) - d_P^2(0, \mathbf{m}) = -2(\mathbf{p} \circ \mathbf{m})(\mathbf{p} \circ \delta \mathbf{m}) \quad \text{für } \delta \mathbf{m} \text{ mit } \mathbf{m} \circ \delta \mathbf{m} = 0. \quad (4.8)$$

Betrachtet wird jetzt der Abstand von N_p Punkten P_i , $i = 1, \dots, N_p$ zur Ausgleichsgeraden. Es ergibt sich für die Abstandsquadratsumme $d_g^2(0, \mathbf{m}) := \sum_{i=1}^{N_p} d_{P_i}^2(0, \mathbf{m})$ die Formel

$$d_g^2(0, \mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{N_p} \left(\mathbf{p}_i^2 - (\mathbf{p}_i \circ \mathbf{m})^2 \right). \quad (4.9)$$

Für die Änderung der Abstandsquadratsumme folgt aus Gleichung (4.8)

$$d_g^2(0, \bar{\mathbf{m}}) - d_g^2(0, \mathbf{m}) = -2 \sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{p}_i \circ \mathbf{m})(\mathbf{p}_i \circ \delta \mathbf{m}) \quad \text{für } \delta \mathbf{m} \text{ mit } \mathbf{m} \circ \delta \mathbf{m} = 0. \quad (4.10)$$

Falls \mathbf{m} die Ausgleichsgerade beschreibt, die Abstandsquadratsumme also minimal ist, muss $d_g^2(\bar{\mathbf{m}}) - d_g^2(\mathbf{m}) = 0$ gelten. Daraus folgt mit Gleichung (4.10)

$$\sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{p}_i \circ \mathbf{m}) \mathbf{p}_i \circ \delta \mathbf{m} = 0 \quad \text{für } \delta \mathbf{m} \text{ mit } \mathbf{m} \circ \delta \mathbf{m} = 0. \quad (4.11)$$

Da diese Gleichung für alle $\delta \mathbf{m}$ mit $\delta \mathbf{m} \circ \mathbf{m} = 0$ gilt, folgt

$$\sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{p}_i \circ \mathbf{m}) \mathbf{p}_i = \lambda \mathbf{m} \quad (4.12)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. In Matrizenschreibweise wird daraus die Eigenwertgleichung

$$\sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i^T \mathbf{m} = \lambda \mathbf{m}. \quad (4.13)$$

Aus Gleichung (4.12) ergibt sich durch Skalarproduktbildung mit \mathbf{m}

$$\sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{p}_i \circ \mathbf{m})(\mathbf{p}_i \circ \mathbf{m}) = \lambda \underbrace{\mathbf{m} \circ \mathbf{m}}_{=1} = \lambda. \quad (4.14)$$

Damit ist Gleichung (4.9) äquivalent zu

$$d_g^2(0, \mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{p}_i^2 - \lambda. \quad (4.15)$$

Das Minimum der Abstandskadratsumme ergibt sich also für den Eigenvektor \mathbf{m} zum größten Eigenwert λ .

Als nächstes wird untersucht, wie sich die Abstandskadratsumme ändert, wenn der vorgegebene Punkt um infinitesimale Beträge verschoben wird. Das Einführen einer vom Koordinatenursprung verschiedenen Quelle Q führt in den obigen Formeln zum Ersetzen von \mathbf{p}_i durch $\mathbf{p}_i - \mathbf{q}$, wobei \mathbf{q} der Ortsvektor der Quelle ist. Nach Durchführen dieser Ersetzung wird aus Gleichung (4.13)

$$\sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{p}_i - \mathbf{q})(\mathbf{p}_i^T - \mathbf{q}^T) \mathbf{m} = \lambda \mathbf{m} \quad (4.16)$$

und aus Gleichung (4.15)

$$d_g^2(\mathbf{q}, \mathbf{m}) := \sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{p}_i - \mathbf{q})^2 - \lambda. \quad (4.17)$$

Für eine leicht abgeänderte Quelle \bar{Q} mit dem Ortsvektor $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}$ wird aus Gleichung (4.16)

$$\sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{p}_i - \mathbf{q} - \delta \mathbf{q})(\mathbf{p}_i^T - \mathbf{q}^T - \delta \mathbf{q}^T) \bar{\mathbf{m}} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{m}}, \quad (4.18)$$

wobei $\bar{\mathbf{m}}$ der zur neuen Quelle gehörende Richtungsvektor der Ausgleichsgeraden ist und $\bar{\lambda}$ der neue Eigenwert zu $\bar{\mathbf{m}}$. Analog zu Gleichung (4.14) gilt

$$\sum_{i=1}^{N_p} \bar{\mathbf{m}}^T (\mathbf{p}_i - \mathbf{q} - \delta \mathbf{q})(\mathbf{p}_i^T - \mathbf{q}^T - \delta \mathbf{q}^T) \bar{\mathbf{m}} = \bar{\lambda}. \quad (4.19)$$

Laut Störungstheorie linearer Operatoren [25, Seite 80] gilt

$$\sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{m}^T (\mathbf{p}_i - \mathbf{q} - \delta \mathbf{q})(\mathbf{p}_i^T - \mathbf{q}^T - \delta \mathbf{q}^T) \mathbf{m} = \underbrace{\bar{\lambda} + o(\bar{\lambda})}_{=: \tilde{\lambda}}, \quad (4.20)$$

wobei $o(\bar{\lambda})$ bei Annäherung an Null überlinear gegen Null konvergiert.

Im Folgenden wird für die Näherung $\tilde{\lambda}$ wieder $\bar{\lambda}$ geschrieben. Die Gleichung (4.20) lässt sich zu

$$\begin{aligned}\bar{\lambda} &= \underbrace{\sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{m}^T (\mathbf{p}_i - \mathbf{q}) (\mathbf{p}_i^T - \mathbf{q}^T) \mathbf{m}}_{=\lambda} - \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{m}^T (\mathbf{p}_i - \mathbf{q}) \delta \mathbf{q}^T \mathbf{m} - \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{m}^T \delta \mathbf{q} (\mathbf{p}_i^T - \mathbf{q}^T) \mathbf{m} \\ &= \lambda - 2 \sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{p}_i - \mathbf{q})^T \mathbf{m} \mathbf{m}^T \delta \mathbf{q}\end{aligned}\quad (4.21)$$

umformen. Die Abstandsquadratsumme mit der Quelle \bar{Q} ist analog zu Gleichung (4.17)

$$d_g^2(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{m}}) = \sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{p}_i - \mathbf{q} - \delta \mathbf{q})^2 - \bar{\lambda}.\quad (4.22)$$

Durch Umformung des ersten Terms und anschließendem Anwenden der Gleichung (4.17) ergibt sich

$$\begin{aligned}d_g^2(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{m}}) &= \sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{p}_i - \mathbf{q})^2 - 2 \sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{p}_i - \mathbf{q})^T \delta \mathbf{q} - \bar{\lambda} \\ &= d_g^2(\mathbf{q}, \mathbf{m}) - 2 \sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{p}_i - \mathbf{q})^T \delta \mathbf{q} + \lambda - \bar{\lambda}.\end{aligned}\quad (4.23)$$

Daraus folgt mit Gleichung (4.21)

$$d_g^2(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{m}}) - d_g^2(\mathbf{q}, \mathbf{m}) = -2 \sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{p}_i - \mathbf{q})^T \delta \mathbf{q} + 2 \sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{p}_i - \mathbf{q})^T \mathbf{m} \mathbf{m}^T \delta \mathbf{q}$$

und durch Ausklammern

$$d_g^2(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{m}}) - d_g^2(\mathbf{q}, \mathbf{m}) = -2 \sum_{i=1}^{N_p} (\mathbf{p}_i - \mathbf{q})^T (1 - \mathbf{m} \mathbf{m}^T) \delta \mathbf{q}.\quad (4.24)$$

Im Folgenden werden statt einer mehrere Ausgleichsgeraden durch Q simultan betrachtet. Die Punkte P_{ki} mit den Ortsvektoren \mathbf{p}_{ki} , $k = 1, \dots, N_g$, $i = 1, \dots, N_p(k)$ seien die Punkte, welche die Gerade g_k mit dem Richtungsvektor $\mathbf{m}_k(\mathbf{q})$ approximieren soll. Die Änderung der über alle N_g Geraden des Fächers summierten Abstandsquadratsumme $d_F^2(\mathbf{q}) := \sum_{k=1}^{N_g} d_{g_k}^2(\mathbf{q}, \mathbf{m}_k(\mathbf{q}))$ ist dann

$$d_F^2(\bar{\mathbf{q}}) - d_F^2(\mathbf{q}) = -2 \sum_{k=1}^{N_g} \sum_{i=1}^{N_p(k)} (\mathbf{p}_{ki} - \mathbf{q})^T (1 - \mathbf{m}_k \mathbf{m}_k^T) \delta \mathbf{q}.$$

In dem Fall, dass \mathbf{q} der Ortsvektor der Quelle mit der geringsten Abstandsquadratsumme ist, muss $d_F^2(\bar{\mathbf{q}}) - d_F^2(\mathbf{q}) = 0$ erfüllt sein. Es gilt demzufolge

$$2 \sum_{k=1}^{N_g} \sum_{i=1}^{N_p(k)} (\mathbf{p}_{ki} - \mathbf{q})^T (1 - \mathbf{m}_k \mathbf{m}_k^T) \delta \mathbf{q} = 0$$

für beliebige infinitesimale $\delta \mathbf{q}$. Daraus ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{N_g} \sum_{i=1}^{N_p(k)} (\mathbf{p}_{ki} - \mathbf{q})^T (1 - \mathbf{m}_k \mathbf{m}_k^T) = 0$$

beziehungsweise

$$\sum_{k=1}^{N_g} \sum_{i=1}^{N_p(k)} \mathbf{q}^T (1 - \mathbf{m}_k \mathbf{m}_k^T) = \sum_{k=1}^{N_g} \sum_{i=1}^{N_p(k)} \mathbf{p}_{ki}^T (1 - \mathbf{m}_k \mathbf{m}_k^T).$$

Durch Transponieren dieser Gleichung und Berechnung der Summe über i auf der linken Seite ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{N_g} N_p(k) (1 - \mathbf{m}_k \mathbf{m}_k^T) \mathbf{q} = \sum_{k=1}^{N_g} \sum_{i=1}^{N_p(k)} (1 - \mathbf{m}_k \mathbf{m}_k^T) \mathbf{p}_{ki} \quad (4.25)$$

zur Bestimmung von \mathbf{q} .

Zusammenfassend lässt sich das Verfahren zur Auswertung der Durchstrahlungsbilder des Geometriekalibrierkörpers wie folgt beschreiben: Als erstes werden für jede Projektionsgerade zwei näherungsweise auf ihr liegende Punkte bestimmt. Die Gerade durch diese beiden Punkte wird als vorläufige Näherung für die Projektionsgerade verwendet. Mit den Richtungen \mathbf{m} der vorläufigen Projektionsgeraden wird mittels des Gleichungssystems (4.25) der Ortsvektor \mathbf{q} der Fächerspitze Q bestimmt. Die endgültigen Projektionsgeraden werden als Ausgleichsgeraden durch den vorgegebenen Punkt Q mittels der Gleichung (4.16) ermittelt.

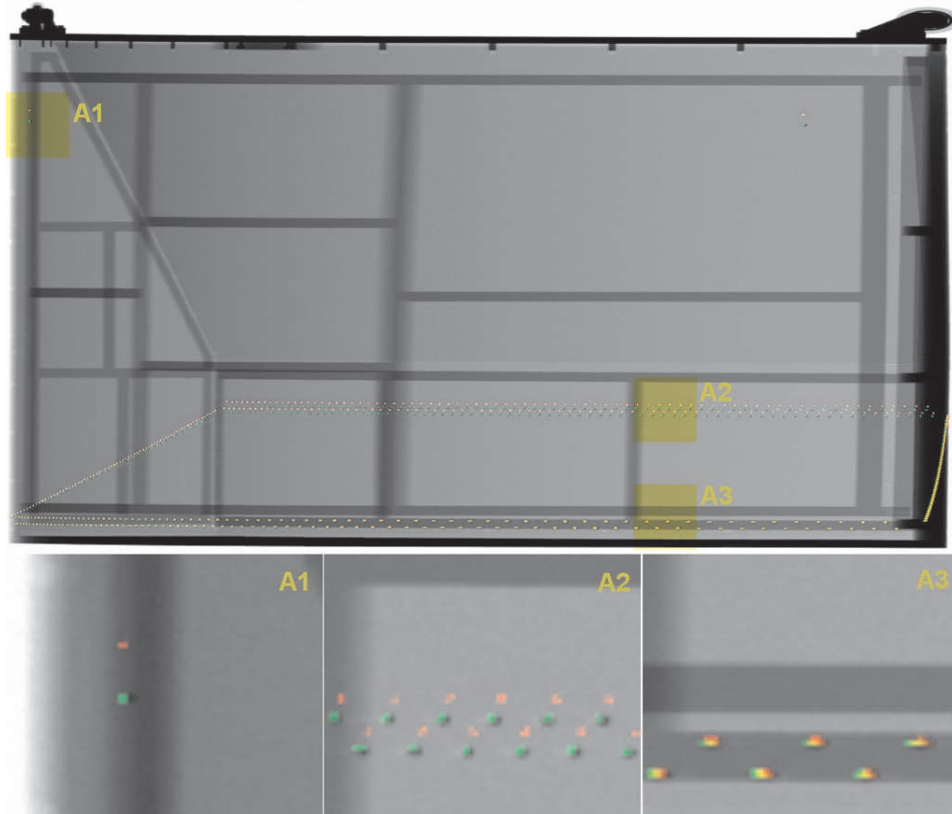


Abbildung 4.8.: Vergleich der Geometriekalibrierung anhand einer Projektion des Geometriekalibrierkörpers aufgenommen mit der EDtS, einschließlich Ausschnittvergrößerungen A1 bis A3. Anzeigen der Stahlkugeln: Originalprojektion (dunkelgrau), Herstellerkalibrierung (rot), Neukalibrierung (grün) [21]

Anwendung

Das hier beschriebene Verfahren zur Geometriekalibrierung wurde für die Röntgendurchstrahlungsanlage EDtS in dem Computerprogramm **geokalib** umgesetzt. Die damit mögliche Kalibrierung der Anlagengeometrie ist deutlich genauer als die vom Hersteller angegebene Kalibrierung, was nachfolgend anhand eines Beispiels dargestellt wird. Die wiederholte Ausführung der Kalibrierung einer Durchstrahlungsanlage reproduziert die Ergebnisse mit einer Genauigkeit von circa 0,5 mm.

Von den fünf Bildern der EDtS werden jeweils das erste und das zweite sowie das dritte und das vierte Bild mit derselben Quelle aufgenommen. Die entwickelte Kalibrierung bestimmt für den ersten und den zweiten (beziehungsweise für den dritten und den vierten) Strahlenfächer Quellen, die mit einer Genauigkeit von circa 1 mm identisch sind.

Den Vergleich der bisherigen Kalibrierung mit dem Ergebnis der neu entwickelten Methode anhand eines Projektionsbildes des Kalibrierkörpers zeigt Abbildung 4.8. Dabei ist die Originalprojektion als Grauwertbild dargestellt, dem die simulierten Projektionen der Stahlkugeln für die Herstellerkalibrierung (rot) und die entwickelte Kalibrierung (grün) überlagert sind.

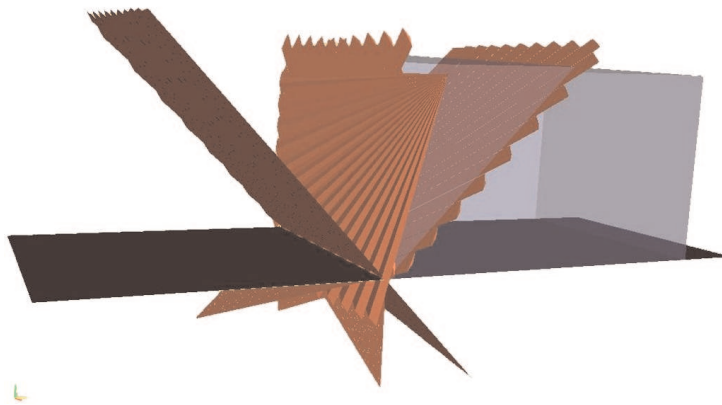


Abbildung 4.9.: Computervisualisierung der EDtS-Aufnahmegeometrie [21]

Von dem in Abbildung 4.8 oben dargestellten Übersichtsbild sind die Bildausschnitte A1, A2 und A3 vergrößert wiedergegeben. In der unteren Doppelkugelreihe (Bildausschnitt A3) treten geringe Abweichungen zwischen beiden Kalibrierungen auf, da dieser Bildbereich für die Anpassung der geometrischen Überlagerung der drei Projektionsbilder verwendet wurde. Die Stahlkugeln bilden sich in der Originalprojektion als dunkle Schatten ab und sind teilweise durch die farbigen Anzeigen überlagert. Im Ausschnitt A2 sind deutliche Abweichungen zwischen beiden Kalibrierungen zu erkennen, wobei die Neukalibrierung (grün) mit der Originalprojektion gut übereinstimmt. Noch stärkere Abweichungen zwischen den beiden Kalibrierungen treten im Ausschnitt A1 auf. Während Neukalibrierung und Originalprojektion gut übereinstimmen, weicht die Anzeige der Stahlkugel für die Herstellerkalibrierung um ungefähr 16 mm von der tatsächlichen Position in der Projektion ab.

Die Geometriekalibrierung wurde mit Hilfe einer Computersimulation [26] überprüft und verglichen. Abbildung 4.9 zeigt ein Modell der Aufnahmegeometrie der EDtS mit den Strahlenfächern aller fünf Ansichten sowie dem Transportband und dem Tunnel der Gepäckprüfanlage. Bei gleichzeitiger Abbildung beider Geometriekalibrierungen werden auch kleine Abweichungen erkennbar. In Abbildung 4.10 sind zwei Modelle der Fächer einer Ansicht dargestellt, wobei ein Modell die Herstellerkalibrierung und das andere die hier vorgestellte Kalibrierung repräsentiert.

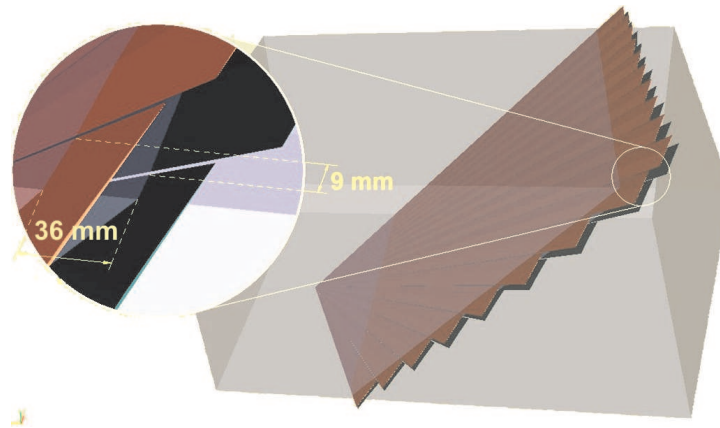


Abbildung 4.10.: Geometrische Überlagerung von Herstellerkalibrierung und hier entwickelter Kalibrierung für eine Ansicht (View 1) und Kennzeichnung der Abweichungen an der oberen Tunnelbegrenzung (identische Quellpositionen) [21]

Durch Verschieben wurden die Quellpositionen beider Kalibrierungen zur Deckung gebracht, so dass Unterschiede detektorseitig sichtbar werden. Wie in Abbildung 4.10 besonders hervorgehoben, wurden an diesem Beispiel Abweichungen in der Strahlengeometrie von circa 36 mm in Führungsgeradenrichtung und circa 9 mm quer zur Führungsgeradenrichtung an der oberen Tunnelbegrenzung gemessen [21].

4.2. Materialkalibrierung

Unter der Voraussetzung der Bestimmbarkeit der Linienintegrale aus den Grauwerten der Pixel der Durchstrahlungsbilder wird in Kapitel 5 ein Zusammenhang zwischen den Momenten von Bild und Objekt hergestellt. Die Bestimmung der Linienintegrale ist für den Fall monoenergetischer Quellen in Kapitel 2 dargestellt.

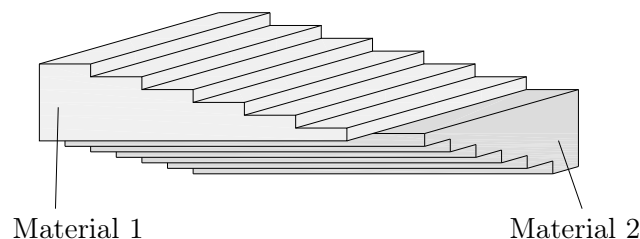


Abbildung 4.11.: Prinzipskizze Doppelstufenkeil

Bei polyenergetischen Quellen müssen die Materialzuordnungsfunktionen $F_i(\bar{L}_F, \bar{L}_C, \bar{L}_P)$, die den Linienintegralen die Grauwerte des Bildes zuordnen, entweder theoretisch aus den bekannten spektralen Empfindlichkeiten $\bar{a}_i(E)$ (Kapitel 2) oder experimentell mit einem in diesem Abschnitt zu entwickelnden Verfahren zur Materialkalibrierung anhand von Durchstrahlungsaufnahmen eines Kalibrierkörpers bestimmt werden.

Nach der Bestimmung der $F_i(\bar{L}_F, \bar{L}_C, \bar{L}_P)$ werden die Funktionen, die aus den Grauwerten die zugehörigen Linienintegrale berechnen, mittels Inversion bestimmt.

Im Folgenden wird ein für Dual-Energie-Aufnahmen geeigneter Kalibrierkörper vorgestellt. Anschließend wird kurz darauf eingegangen, wie der Kalibrierkörper für Drei-Energie-Aufnahmen aussehen müsste.

Die Grundidee des Kalibrierverfahrens besteht darin, den Kalibrierkörper so zu konstruieren, dass in seiner Durchstrahlungsaufnahme alle praktisch relevanten Kombinationen der Werte von $\bar{L}_F = \int_{\mathbb{R}} H_F(\mathbf{q} + \bar{t}\mathbf{n})d\bar{t}$ und $\bar{L}_C = \int_{\mathbb{R}} H_C(\mathbf{q} + \bar{t}\mathbf{n})d\bar{t}$ vorkommen. Dies lässt sich zum Beispiel durch den in Abbildung 4.11 dargestellten Doppelstufenkeil realisieren. Er besteht aus zwei Stufenkeilen, die aus unterschiedlichen Materialien (Polyethylen - PE 500, natur; Kupfer ECU/2006, blank, halbhart) gefertigt und deren Stufen orthogonal angeordnet sind. Für die Stufenkeile wurden ein Material mit einer in Hinblick auf die Anwendung möglichst hohen mittleren Ordnungszahl und eines mit einer möglichst niedrigen mittleren Ordnungszahl gewählt.

Durch die oben beschriebene Anordnung entsteht im Durchstrahlungsbild (Abbildung 4.12) ein quadratisches Raster mit verschiedenen Kombinationen der Dicken d_{Cu} , d_{PE} von Kupfer und Polyethylen. Jeder durchstrahlten Länge d_{Cu} ist nach Gleichung (2.28) das Linienintegral

$$\bar{L}_F = \int_0^{d_{Cu}} \underbrace{H_F(\mathbf{q} + \bar{t}\mathbf{n})}_{\text{konst}} d\bar{t} = d_{Cu} H_{F,Cu} \quad (4.26)$$

zugeordnet, wobei $H_{F,Cu} = n_{Cu} h_F(Z_{Cu})$ nach Gleichung (2.14) gilt¹. Analoge Beziehungen gelten auch zwischen d_{Cu} und \bar{L}_C , d_{PE} und \bar{L}_F sowie d_{PE} und \bar{L}_C . Es ergibt sich also aus dem Raster mit verschiedenen Materialdicken d_{Cu} , d_{PE} ein Raster mit den verschiedenen Kombinationen von \bar{L}_F , \bar{L}_C . Der Vorteil dieser Rasterung besteht darin, dass bestimmte Werte der Materialzuordnungsfunktionen direkt aus dem Durchstrahlungsbild (Abbildung 4.12) ablesbar sind, aus welchen sich die weiteren Werte der Materialzuordnungsfunktionen mittels Interpolation und Extrapolation bestimmen lassen.



Abbildung 4.12.: Durchstrahlungsaufnahme eines Doppelstufenkeils für eine Energie

Das Ergebnis einer mit dem oben beschriebenen Doppelstufenkeil durchgeführten Kalibrierung ist in Abbildung 4.13 gezeigt. Es ist deutlich erkennbar, dass die Zuordnung bei größeren Materialdicken ungenauer wird. Zur Verringerung dieses Effektes wurden die experimentellen Daten geglättet, um zur endgültigen Materialzuordnungsfunktion (Abbildung 4.14) zu gelangen [21].

Auf diese Weise ist ein Verfahren gefunden, welches für Dual-Energie-Aufnahmen den Grauwerten der Pixel die Werte der Linienintegrale der zugehörigen Projektionsgeraden zuordnet. Durch Anwendung dieses Verfahrens auf jeden Pixel einer Dual-Energie-Aufnahme ergeben sich die in

¹Ordnungszahl $Z_{Cu} = 29$

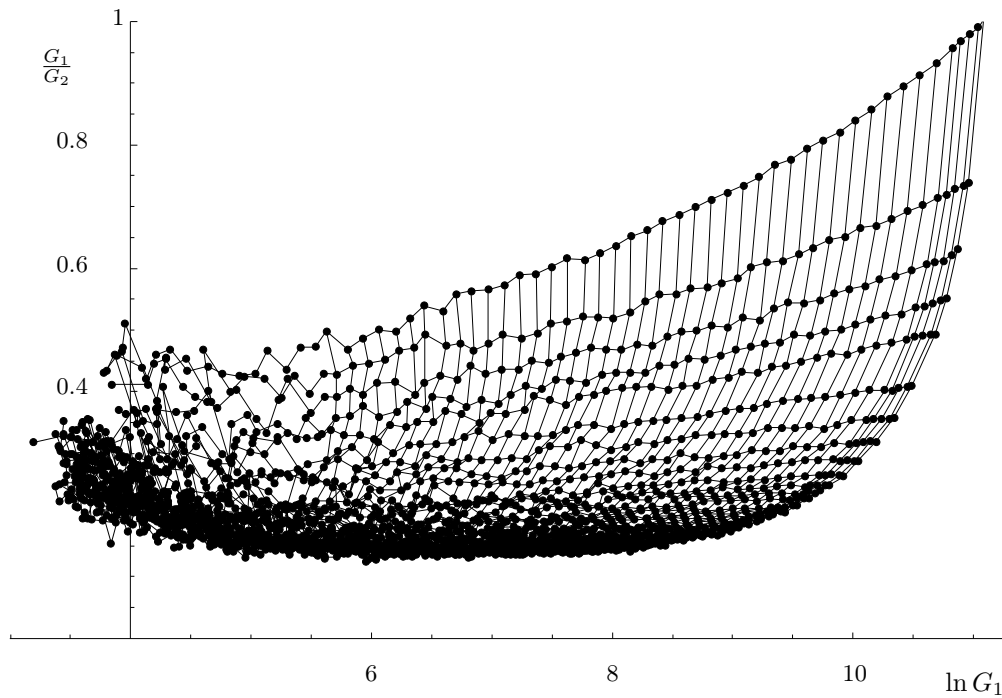


Abbildung 4.13.: Darstellung der Materialzuordnungsfunktionen (experimentelle Ergebnisse) am Beispiel Polyethylen und Kupfer. Jeder Punkt repräsentiert eine Kombination von Materialdicken. Dabei sind größere Polyethylen-dicken weiter links und größere Kupferdicken weiter unten dargestellt.

Abbildung 4.15 dargestellten materialkalibrierten Bilder. Dargestellt sind die zu Polyethylen beziehungsweise Kupfer entsprechend ihrer chemischen Zusammensetzung und Dichte gehörenden Linearkombinationen von \bar{L}_F und \bar{L}_C .

Für die Kalibrierung von Drei-Energie-Aufnahmen ist ein analoges Vorgehen möglich. In diesem Fall muss eine Messreihe durchgeführt werden, bei der jeweils eine ebene Platte eines dritten Materials mit von Aufnahme zu Aufnahme variierender Dicke über den Doppelstufenkeil gelegt wird. Auf diese Weise ergeben sich die praktisch relevanten Kombinationen der Werte von \bar{L}_F , \bar{L}_C und \bar{L}_P . Die Auswertung der entstehenden Durchstrahlungsbilder kann analog zu der Auswertung der Dual-Energie-Aufnahmen erfolgen.

Bemerkung: In der Computertomografie treten bei der Verwendung von polyenergetischen Strahlungsquellen und der Messung nur eines Messwertes pro Pixel Fehler (Aufhärtungsartefakte) aufgrund der mit einem systematischen Fehler behafteten Berechnung der Linienintegrale der Schwächungskoeffizientenverteilung aus den Messwerten auf [27]. Eine Computertomografieanlage, welche Dual-Energie-Aufnahmen erzeugt, kann ebenso wie eine Durchstrahlungsanlage zur Gepäckprüfung mit dem entwickelten Verfahren kalibriert werden. Die materialkalibrierten Bilder enthalten für jeden Pixel die Werte der Linienintegrale \bar{L}_F und \bar{L}_C . Die mit den materialkalibrierten Bildern durchgeführte Computertomografie enthält deshalb, analog zur Computertomografie mit monoenergetischen Strahlungsquellen, keine systematischen Fehler aufgrund einer fehlerbehafteten Berechnung der Linienintegrale aus den Messwerten, so dass Aufhärtungsartefakte vermieden werden.

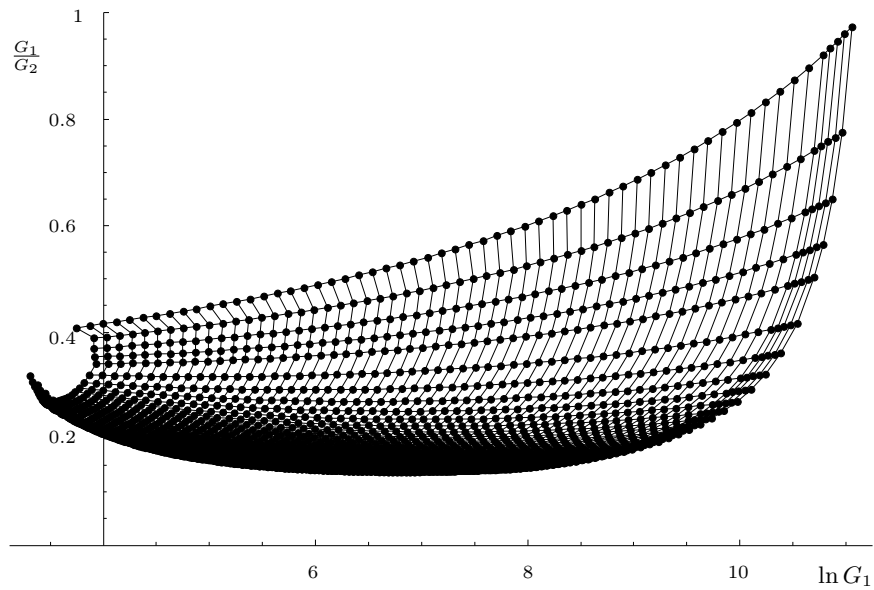


Abbildung 4.14.: Darstellung der Materialzuordnungsfunktionen (geglättet) am Beispiel Polyethylen und Kupfer. Jeder Punkt repräsentiert eine Kombination von Materialdicken. Dabei sind größere Polyethyldicken weiter links und größere Kupferdicken weiter unten dargestellt.

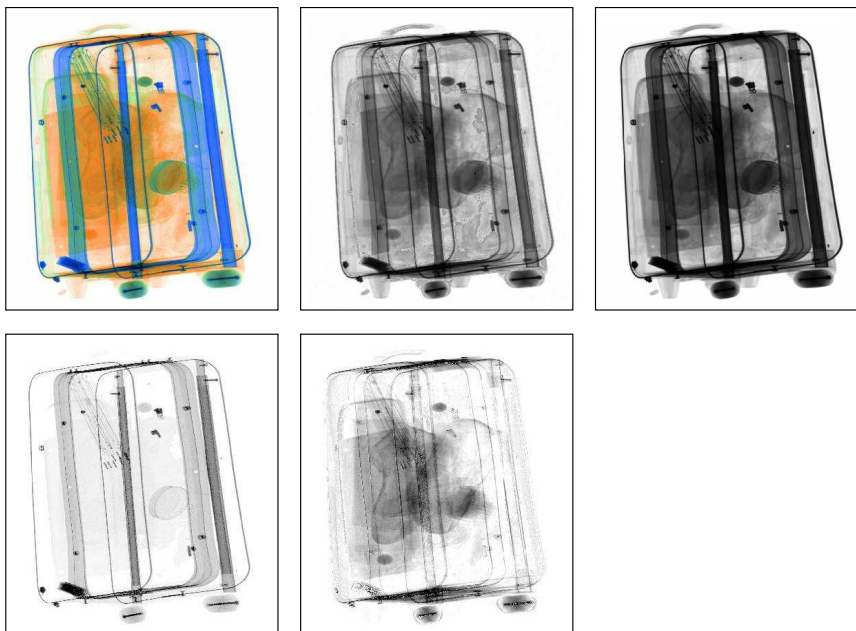


Abbildung 4.15.: Materialkalibration einer Dual-Energie-Aufnahme: Dual-Energie-Aufnahme in Falschfarbendarstellung (oben links); Bilder zu den einzelnen Energien (oben mittig und oben rechts); Materialkalibrierte Bilder - Kupfer (unten links) Polyethylen (unten rechts)

5. Entwicklung theoretischer Grundlagen zur Positionswiederfindung mit Momenten

Aus den gemessenen Bildern sind Eigenschaften des Objektes zu bestimmen, welche geeignet sind, die Lage des Objektes zu beschreiben. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass die Momente der Schwächungskoeffizientenverteilung des Objektes diese Eigenschaften erfüllen. Für den Fall der Parallelprojektionen können die Momente des Objektes direkt aus den Momenten der Bilder berechnet werden. Für den Fall der Fächerscharprojektionen werden andere direkt aus den Bildern berechenbare integrale Größen ermittelt. Wie sich aus diesen Größen die Momente des Objektes bestimmen lassen, wird in Kapitel 6 dargestellt.

5.1. Parallelprojektion

In diesem Abschnitt werden die Zusammenhänge zwischen den Momenten der Schwächungskoeffizientenverteilung des Objektes und den Momenten des kalibrierten Bildes für den Fall der Parallelprojektionen hergeleitet. Das ist möglich, da sich aus dem Durchstrahlungsbild die Integrale der Schwächungskoeffizienten entlang der Projektionsgeraden berechnen lassen.

Das Moment der Grauwertverteilung des kalibrierten Bildes der durch \mathbf{q} und \mathbf{m} beschriebenen Parallelprojektion (Abschnitt 2.1.1) lautet allgemein

$$J_{\mathbf{q},\mathbf{m}}[w] := \int_{\mathbb{R}} w(u) L_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(u) du, \quad (5.1)$$

wobei $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Momentenfunktion ist, welche das konkrete Moment beschreibt. Insbesondere ergibt sich für $w(u) = u^N$ mit $N \in \mathbb{N}$ das Bildmoment N -ter Ordnung.

Die Definition in Gleichung (5.1) wird nicht auf Momentenfunktionen eingeschränkt, sondern ist auch für beliebige integrierbare Funktionen w gültig. Im Folgenden wird w als Bildwichtungsfunktion bezeichnet.

Das Moment $J_{\mathbf{q},\mathbf{m}}[w]$ lässt sich mit Gleichung (2.40) zu

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{q},\mathbf{m}}[w] &= \int_{\mathbb{R}} w(u) \int_{\mathbb{R}} \mu(\mathbf{p}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(u,t)) dt du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(u) \mu(\mathbf{p}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(u,t)) dt du \end{aligned} \quad (5.2)$$

umformen. Um den Zusammenhang zu den Momenten des Objektes zu ermitteln, wird dieses Integral in die Form $\int_{\mathbb{R}^2} w(\dots) \mu(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x}$ überführt. Dazu wird die Substitution $\mathbf{x} = \mathbf{p}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(u,t)$ durchgeführt. Mit Gleichung (2.37) sind die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{(q,m)1} \\ p_{(q,m)2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix}}_{:=\mathbf{A}} \begin{pmatrix} u \\ t \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Wegen Gleichung (2.38) ist die Matrix A orthogonal, es gilt also $A^{-1} = A^T$. Damit kann man nun obige Gleichung nach u, t umstellen und erhält

$$\begin{pmatrix} u \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right). \quad (5.4)$$

Aus Gleichung (5.3) folgt

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix}}_{:=\mathbf{A}} \begin{pmatrix} du \\ dt \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Mit dem *Transformationssatz für mehrdimensionale Substitution* [28] ergibt sich aus den Gleichungen (5.2) bis (5.5)

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{q},\mathbf{m}}[w] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(\mathbf{m} \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})) \mu(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} w(\mathbf{m} \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})) \mu(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Speziell folgt für $w(u) = 1$ das Moment nullter Ordnung

$$J_{\mathbf{q},\mathbf{m}}[1] = \int_{\mathbb{R}^2} \mu(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} = M. \quad (5.7)$$

Das heißt, dass das Moment nullter Ordnung des Projektionsbildes dem Moment nullter Ordnung des Objektes entspricht.

Für $w(u) = u$ ist das Moment erster Ordnung

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{q},\mathbf{m}}[\bullet] &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{m} \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}) \mu(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{m} \circ \mathbf{x} \mu(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{m} \circ \mathbf{q} \mu(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} \\ &= M(\mathbf{m}) - (\mathbf{m} \circ \mathbf{q}) M \end{aligned} \quad (5.8)$$

und für $w(u) = u^2$ das Moment zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{q},\mathbf{m}}[\bullet^2] &= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{m} \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}))^2 \mu(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{m} \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})) (\mathbf{m} \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})) \mu(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{m} \circ \mathbf{x}) (\mathbf{m} \circ \mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} - \\ &\quad 2(\mathbf{m} \circ \mathbf{q}) \int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{m} \circ \mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} + (\mathbf{m} \circ \mathbf{q})^2 \int_{\mathbb{R}^2} \mu(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} \\ &= M(\mathbf{m}, \mathbf{m}) - 2(\mathbf{m} \circ \mathbf{q}) M(\mathbf{m}) + (\mathbf{m} \circ \mathbf{q})^2 M. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Dieser grundlegende Zusammenhang zwischen den Momenten des Bildes und den Momenten des Objektes wird in Kapitel 6 für die Positionswiederfindung genutzt.

Upparametrisierung

Im Folgenden wird untersucht, wie sich die hier abgeleiteten Gleichungen ändern, wenn zu einer anderen Beschreibung der Aufnahmegeometrie übergegangen wird. Die durch die Geradengleichung (2.37) beschriebene Aufnahmegeometrie ändert sich nicht, wenn die neuen Parameter

$$\bar{u} := u + c_u \quad \text{und} \quad (5.10)$$

$$\bar{t} := t + c_t \quad (5.11)$$

mit $c_u, c_t \in \mathbb{R}$ eingeführt werden. Die Beschreibung der Aufnahmegeometrie und der daraus abgeleiteten Größen ändert sich hingegen. Aus der Gleichung (2.37) für die Projektionsgeraden wird mit der neuen Parametrisierung (Gleichungen (5.10), (5.11)) die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{m}}(u(\bar{u}), t(\bar{t})) &= \mathbf{q} + (\bar{u} - c_u) \mathbf{m} + (\bar{t} - c_t) \mathbf{n} \\ &= \mathbf{q} - c_u \mathbf{m} - c_t \mathbf{n} + \bar{u} \mathbf{m} + \bar{t} \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Dies entspricht einer um $-c_u \mathbf{m} - c_t \mathbf{n}$ verschobenen Basisquelle, es gilt also

$$\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{m}}(\bar{u} - c_u, \bar{t} - c_t) = \mathbf{p}_{\mathbf{q} - c_u \mathbf{m} - c_t \mathbf{n}, \mathbf{m}}(\bar{u}, \bar{t}). \quad (5.13)$$

Weil die Basisquelle Q sowohl in Richtung \mathbf{m} als auch \mathbf{n} verschoben werden kann, ist sie letztlich frei wählbar. Mittels der Substitution $\bar{t} = t + c_t$ lässt sich Gleichung (2.40) zu

$$L_{\mathbf{q}, \mathbf{m}}(u) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{m}}(u, \bar{t} - c_t)) d\bar{t} \quad (5.14)$$

umformen. Daraus wird mit Gleichung (5.13)

$$L_{\mathbf{q}, \mathbf{m}}(u) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\mathbf{p}_{\mathbf{q} - c_t \mathbf{n}, \mathbf{m}}(u, \bar{t})) d\bar{t}. \quad (5.15)$$

Nach der Anwendung der Bestimmungsgleichung des Projektionsbildes (2.40) ergibt sich

$$L_{\mathbf{q}, \mathbf{m}}(u) = L_{\mathbf{q} - c_t \mathbf{n}, \mathbf{m}}(u). \quad (5.16)$$

Es ist also möglich, die Basisquelle entlang der Projektionsgeraden zu verschieben, ohne dass sich das Projektionsbild ändert. Aus Gleichung (5.13) folgt mit Gleichung (2.40) auch

$$L_{\mathbf{q}, \mathbf{m}}(\bar{u} - c_u) = L_{\mathbf{q} - c_u \mathbf{m}, \mathbf{m}}(\bar{u}) \quad (5.17)$$

und entsprechend für die Momente

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{q}, \mathbf{m}}[w(\bullet - c_u)] &= \int_{\mathbb{R}} w(\bar{u} - c_u) L_{\mathbf{q}, \mathbf{m}}(\bar{u}) d\bar{u} \\ &= \int_{\mathbb{R}} w(u) L_{\mathbf{q}, \mathbf{m}}(u + c_u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} w(u) L_{\mathbf{q} + c_u \mathbf{m}, \mathbf{m}}(u) du \\ &= J_{\mathbf{q} + c_u \mathbf{m}, \mathbf{m}}[w(\bullet)]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Durch die Upparametrisierung lässt sich demzufolge die Basisquelle \mathbf{q} um $-c_u \mathbf{m}$ zu einer neuen Basisquelle $\bar{\mathbf{q}} := \mathbf{q} - c_u \mathbf{m}$ verschieben. Ist insbesondere $c_u = \mathbf{q} \circ \mathbf{m}$, so gilt $\bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{m} = 0$ und die Gleichung für die Momente vereinfacht sich zu

$$J_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}}[w] = \int_{\mathbb{R}^2} w(\mathbf{m} \circ \mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x}. \quad (5.19)$$

Für ein Moment k -ter Ordnung gilt deshalb

$$J_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}} [\bullet^k] = M(\underbrace{\mathbf{m}, \dots, \mathbf{m}}_{k\text{-mal}}), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.20)$$

Speziell ergeben sich daraus nachfolgende Schlussfolgerungen:

- Das erste Moment des Projektionsbildes entspricht dem ersten Moment des Objektes in Richtung \mathbf{m}

$$J_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}} [\bullet] = M(\mathbf{m}). \quad (5.21)$$

Wegen Gleichung 5.7 wird dann der Schwerpunkt des Objektes auf den Schwerpunkt des Bildes $u_s := J_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}} [\bullet] / J_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}} [0]$ abgebildet, wie in Abbildung 5.1 dargestellt.

- Das zweite Moment des Projektionsbildes entspricht dem zweiten Moment des Objektes um die zu \mathbf{m} senkrechte Achse. Also gilt

$$\begin{aligned} J_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}} [\bullet^2] &= M(\mathbf{m}, \mathbf{m}) \\ &= m_1 m_1 M_{11} + 2m_1 m_2 M_{12} + m_2 m_2 M_{22}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Die Schwerpunkte von Bild und Objekt können ohne Einschränkung der Allgemeinheit in die jeweiligen Koordinatenursprünge gelegt werden, so dass $J_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}} [(\bullet - u_s)^2] = M_{X_S}(\mathbf{m}, \mathbf{m})$ gilt. Da die Momente um den Schwerpunkt nicht von einer Verschiebung des Koordinatenursprungs beeinflusst werden, gilt diese Beziehung auch, wenn Schwerpunkte und Koordinatenursprünge nicht zusammenfallen.

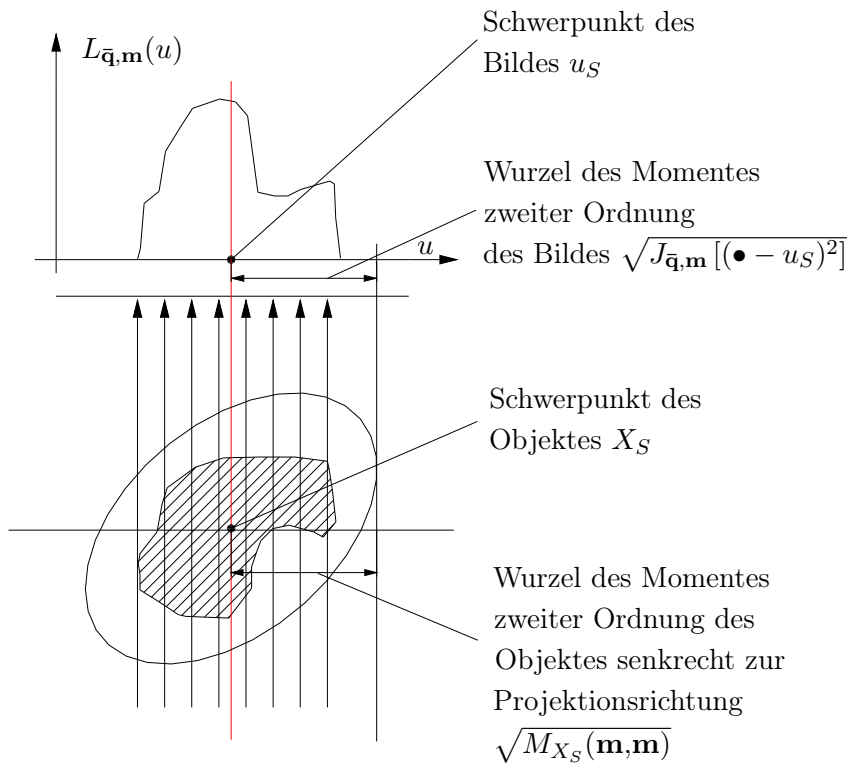


Abbildung 5.1.: Beziehung zwischen Momenten von Objekt und Projektionsbild

Bemerkung: Die Bedingung $\bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{m} = 0$ entspricht der Forderung, dass der Koordinatenursprung des Objektraums auf den Koordinatenursprung des Bildes abgebildet wird, da dann wegen Gleichung (5.4) $u = \mathbf{m} \circ \mathbf{x}$ gilt.

Dreidimensionale Parallelstrahlgeometrie

Im dreidimensionalen Fall ergeben sich zum zweidimensionalen Fall analoge Beziehungen. Diese sind im folgenden Satz dargestellt.

Satz 5.1.1 *Es seien $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ drei zueinander orthogonale, normierte Vektoren. Dann gilt für die Größen*

$$\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v, t) := \mathbf{q} + u\mathbf{m}_1 + v\mathbf{m}_2 + t\mathbf{n}, \quad t, u, v \in \mathbb{R} \quad (5.23)$$

$$L_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v) := \int_{\mathbb{R}} \mu(\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v, t)) dt, \quad u, v \in \mathbb{R} \quad (5.24)$$

$$J_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}[w] := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(u, v) L_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v) du dv, \quad w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \quad (5.25)$$

die Beziehung

$$J_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}[w] = \int_{\mathbb{R}^3} w(\mathbf{m}_1 \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}), \mathbf{m}_2 \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})) \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}, \quad w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}). \quad (5.26)$$

Für $c_u, c_v, c_t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u - c_u, v - c_v, t - c_t) = \mathbf{p}_{\mathbf{q} - c_u \mathbf{m}_1 - c_v \mathbf{m}_2 - c_t \mathbf{n}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v, t), \quad t, u, v \in \mathbb{R} \quad (5.27)$$

$$L_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v) = L_{\mathbf{q} - c_t \mathbf{n}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v), \quad u, v \in \mathbb{R} \quad (5.28)$$

$$L_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u - c_u, v - c_v) = L_{\mathbf{q} - c_u \mathbf{m}_1 - c_v \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v), \quad u, v \in \mathbb{R} \quad (5.29)$$

$$J_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}[w(\bullet_1 - c_u, \bullet_2 - c_v)] = J_{\mathbf{q} + c_u \mathbf{m}_1 + c_v \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}[w(\bullet_1, \bullet_2)], \quad u, v \in \mathbb{R}. \quad (5.30)$$

Für $\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^3$ mit $\bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{m}_1 = \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{m}_2 = 0$ gilt

$$J_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}[w] = \int_{\mathbb{R}^3} w(\mathbf{m}_1 \circ \mathbf{x}, \mathbf{m}_2 \circ \mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}, \quad w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}). \quad (5.31)$$

Der Beweis des Satzes ist im Anhang A dargestellt.

Durch Umparametrisierung des Bildes entsprechend Gleichung (5.29) lässt sich stets ein $\bar{\mathbf{q}}$ mit $\bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{m}_1 = \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{m}_2 = 0$ wählen. Der Schwerpunkt $(u_S, v_S)^T$ des Bildes ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} u_S \\ v_S \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}[1]} \begin{pmatrix} J_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}[\bullet_1] \\ J_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}[\bullet_2] \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

Mit den Gleichungen (5.31) und (2.63) folgt

$$\begin{pmatrix} u_S \\ v_S \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} M(\mathbf{m}_1) \\ M(\mathbf{m}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_S \circ \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{x}_S \circ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Jedem Bildpunkt (u, v) lässt sich der Punkt $\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v, t_D)$ mittels Gleichung (5.23) zuordnen. Auf diese Weise wird das Bild isometrisch in die Detektorebene $\mathcal{D} = \{\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v, t_D) | u, v \in \mathbb{R}\}$ abgebildet, wobei t_D der Abstand der Basisquelle \mathbf{q} zur Detektorebene ist. Die Parallelstrahlgeometrie definiert eine Parallelprojektion $\Pi_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}$, welche jeden Punkt des Raumes in die Detektorebene abbildet. Es muss also $\Pi_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v, t)) = \mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v, t_D)$ gelten. Die

Koordinaten u, v eines Punktes mit dem Ortsvektor \mathbf{x} berechnen sich analog zu Gleichung (5.4) mittels $u = \mathbf{m}_1 \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})$ und $v = \mathbf{m}_2 \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})$. Damit gilt

$$\Pi_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(\mathbf{x}) = \mathbf{q} + (\mathbf{m}_1 \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}))\mathbf{m}_1 + (\mathbf{m}_2 \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}))\mathbf{m}_2 + t_D \mathbf{n}.$$

Daraus folgt mit $\bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{m}_1 = \bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{m}_2 = 0$

$$\Pi_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{q}} + (\mathbf{m}_1 \circ \mathbf{x})\mathbf{m}_1 + (\mathbf{m}_2 \circ \mathbf{x})\mathbf{m}_2 + t_D \mathbf{n}. \quad (5.34)$$

Der Schwerpunkt $(u_S, v_S)^T$ des Bildes wird auf

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u_S, v_S, t_D) &= \bar{\mathbf{q}} + t_D \mathbf{n} + u_S \mathbf{m}_1 + v_S \mathbf{m}_2 \\ &= \bar{\mathbf{q}} + t_D \mathbf{n} + (\mathbf{x}_S \circ \mathbf{m}_1) \mathbf{m}_1 + (\mathbf{x}_S \circ \mathbf{m}_2) \mathbf{m}_2 \\ &= \Pi_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(\mathbf{x}_S) \end{aligned} \quad (5.35)$$

abgebildet. Dem Schwerpunkt des Bildes wird also der parallelprojizierte Schwerpunkt des Objektes zugeordnet. In diesem Sinne wird der Schwerpunkt des Objektes auf den Schwerpunkt des Bildes projiziert.

Der Momententensor $N(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ zweiter Stufe des Bildes ergibt sich für $\mathbf{a} = (a_u, a_v)^T$ zu

$$N(\mathbf{a}, \mathbf{a}) := J_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2} [(a_u \bullet_1 + a_v \bullet_2)] .$$

Da $J_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2} [w]$ in w linear ist, folgt

$$N(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = a_u^2 J_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2} [\bullet_1^2] + 2a_u a_v J_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2} [\bullet_1 \bullet_2] + a_v^2 J_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2} [\bullet_2^2] .$$

Mit den Gleichungen (5.31) und (2.56) ergibt sich

$$N(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = a_u^2 M(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_1) + 2a_u a_v M(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) + a_v^2 M(\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_2) . \quad (5.36)$$

Daraus folgt

$$N(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = (a_u, a_v) \underbrace{\begin{pmatrix} - & \mathbf{m}_1^T & - \\ - & \mathbf{m}_2^T & - \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_2 \\ | & | \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{N}} \begin{pmatrix} a_u \\ a_v \end{pmatrix} , \quad (5.37)$$

wobei \mathbf{M} die Matrix zum Objektmomententensor zweiter Ordnung ist. Die Matrix \mathbf{N} zum Bildmomententensor zweiter Ordnung lässt sich also aus \mathbf{M} berechnen. Aus Gleichung (5.36) folgt mit der Bilinearität von $M(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ in \mathbf{y}, \mathbf{z}

$$N(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = M(a_u \mathbf{m}_1 + a_v \mathbf{m}_2, a_u \mathbf{m}_1 + a_v \mathbf{m}_2) . \quad (5.38)$$

Das heißt, dass die Ausdehnung der Bildmomentenellipse \mathcal{V}_N in Richtung \mathbf{a} der Ausdehnung des Objektmomentenellipsoids \mathcal{V}_M in Richtung $a_u \mathbf{m}_1 + a_v \mathbf{m}_2$ entspricht. Der Richtungsvektor \mathbf{a} wird durch die Parallelprojektion $\Pi_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}$ auf den Richtungsvektor $\Pi_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2} \mathbf{a} - \Pi_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2} 0 = a_u \mathbf{m}_1 + a_v \mathbf{m}_2$ abgebildet. Die Ausdehnung des Objektmomentenellipsoids in einer Richtung senkrecht zur Projektionsrichtung entspricht demzufolge der Ausdehnung der in die Detektorebene abgebildeten Bildmomentenellipse. Da der Schwerpunkt \mathcal{V}_M auf \mathcal{V}_N abgebildet wird, gilt insgesamt: Die Parallelprojektion des Objektmomentenellipsoids entspricht der in die Detektorebene abgebildeten Bildmomentenellipse (Abbildung 5.2), beziehungsweise:

$$\Pi_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2} \mathcal{V}_M = \{\mathbf{p}_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v, t_D) | (u, v) \in \mathcal{V}_N\} . \quad (5.39)$$

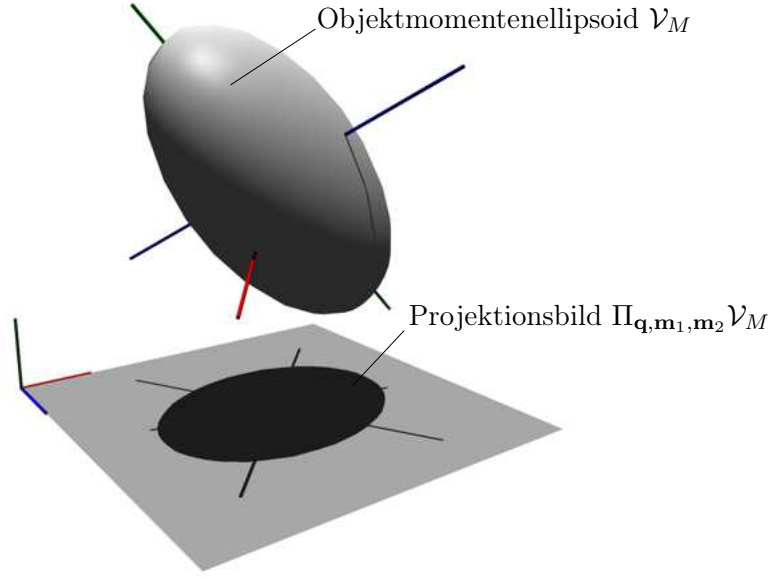


Abbildung 5.2.: Objektmomentenellipsoid und sein Parallelprojektionsbild

5.2. Fächerscharprojektion

Die Fächerscharprojektion ist mittels der Parameter $\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, af$ definiert (Abschnitt 2.1.2). Das Moment

$$J_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, af}[w] := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(u, v) L_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, af}(u, v) du dv \quad (5.40)$$

der Grauwertverteilung $L_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, af}(u, v)$ eines kalibrierten Bildes wird, wie im Fall der Parallelprojektion, durch eine Bildwichtungsfunktion $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ beschrieben. Es ergibt sich für $w(u, v) = u^{k_u} v^{k_v}$ das k_u -te in Richtung u .

Ziel ist es, das Moment $J_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, af}[w]$ durch ein Integral über den dreidimensionalen Raum auszudrücken, um eine Verbindung zu den Momenten des Objektes herzustellen. Das Moment soll also in die Form

$$J_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, af}[w] = \int_{\mathbb{R}^3} h_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, af}[w](\mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad (5.41)$$

mit einer noch zu bestimmenden Objektwichtungsfunktion $h_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, af}[w] : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ überführt werden. Über die Form von $h_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, af}[w]$ gibt der folgende Satz Auskunft.

Satz 5.2.1 *Es seien $u, v, t \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, af}(u, v, t)$ Ortsvektoren der Punkte $P(u, v, t)$. Der Projektionsgeraden $\mathcal{G}(u, v) = \{P(u, v, t) | t \in \mathbb{R}\}$ ist der Punkt $B(u, v)$ des Projektionsbildes mit dem Wert $L_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, af}(u, v)$ zugeordnet. Dann gilt für das Bildmoment $J_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, af}[w]$ zur Funktion $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$*

$$J_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, af}[w] = \int_{\mathbb{R}^3} h_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, af}[w](\mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \quad (5.42)$$

mit

$$h_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, af}[w](\mathbf{x}) = \bar{w} \left(\frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})}{a(\mathbf{f} \times \mathbf{n}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})}, \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})}{\det(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{f})} \right) \frac{1}{|a| |(\mathbf{f} \times \mathbf{n}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})|} \quad (5.43)$$

und

$$\bar{w}(u,v) := |\mathbf{r} + u\mathbf{a}\mathbf{f}| w(u,v) . \quad (5.44)$$

Ein Beispiel ist in Abbildung 5.3 dargestellt.

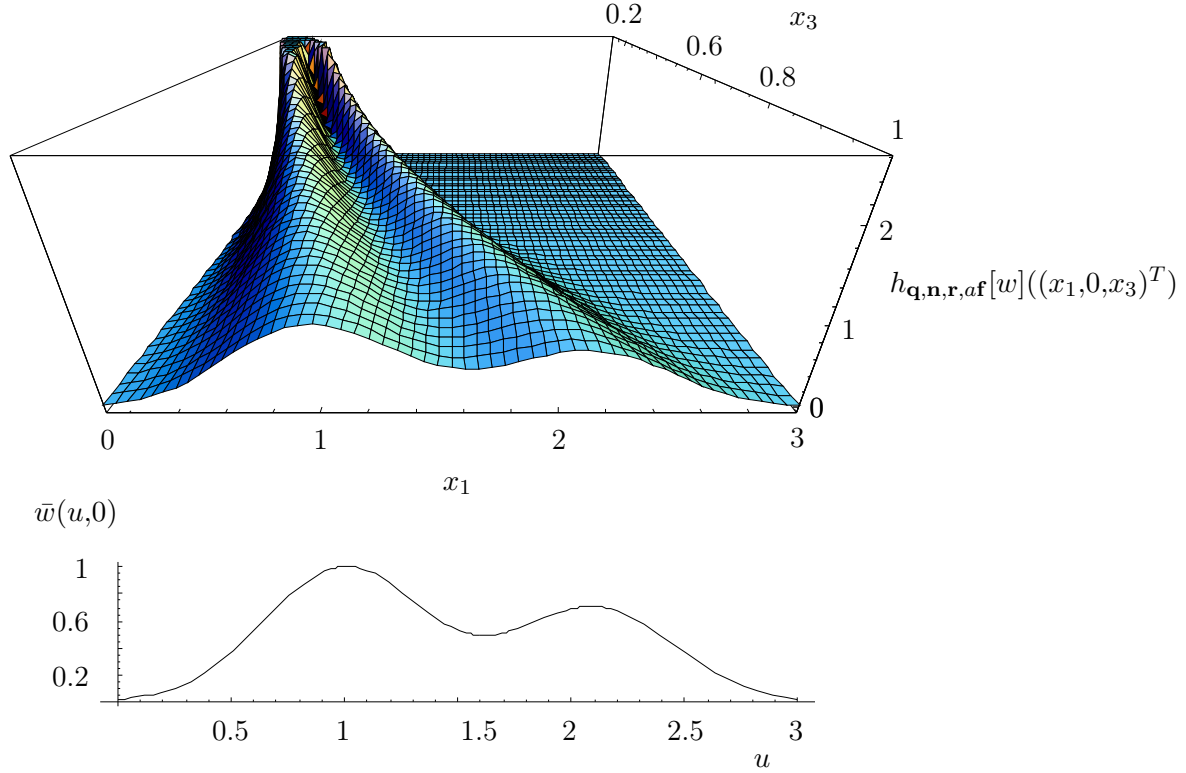


Abbildung 5.3.: Objektwichtungsfunktion für das Beispiel

$$h_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},\mathbf{a}\mathbf{f}}[w] = \sqrt{1 + (x_1/x_3)^2} w((x_1/x_3), x_2) \text{ und } \bar{w}(u,v) = \sqrt{1 + u^2} w(u,v) \text{ in der Fächerebene } \{(x_1, 0, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} \text{ mit } a = 1, \mathbf{n} = (0, 1, 0)^T, \mathbf{f} = (1, 0, 0)^T, \mathbf{r} = (0, 0, 1)^T \text{ und } \mathbf{q} = (0, 0, 0)^T$$

Vor dem Beweis werden die einzelnen Terme geometrisch interpretiert. Es seien X und Q die Punkte zu den Ortsvektoren \mathbf{x} und \mathbf{q} (Abbildung 5.4). Der Wert von $\frac{\mathbf{f} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{f} \times \mathbf{n}|} \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})$ ist der Abstand zwischen Punkt X und der zur Detektorebene parallelen Ebene E durch die Quelle Q . Diese Ebene wird durch die Vektoren \mathbf{f} und \mathbf{n} aufgespannt.

Näher an der Ebene E liegende Objekte werden auf einen größeren Bereich als weiter entfernt liegende Objekte abgebildet. Der Beitrag zum Linienintegral und damit zum Grauwert des Bildes ist von der Entfernung zur Ebene E unabhängig. Auf diese Weise tragen, wie in Abbildung 5.5 dargestellt, Objekte umso stärker zum Wert des Momentes des Bildes bei, je näher sie der die Quelle enthaltenden Ebene E liegen.

Über $|\mathbf{f} \times \mathbf{n}|$ geht die Größe des Flächenelementes des Projektionsbildes in den Wert für das Moment ein. Der Term gibt die Größe des durch \mathbf{f} und \mathbf{n} aufgespannten Parallelogramms an.

Die Fächerscharkoordinaten

$$u := \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})}{a(\mathbf{f} \times \mathbf{n}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})} \quad \text{und} \quad v := \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})}{\det(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{f})} \quad (5.45)$$

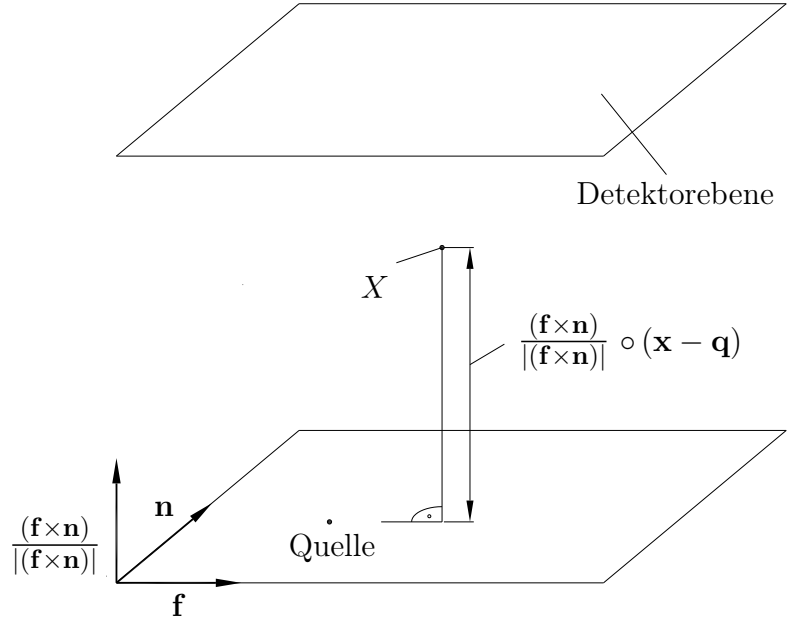


Abbildung 5.4.: Geometrische Interpretation von $\frac{(\mathbf{f} \times \mathbf{n})}{|\mathbf{f} \times \mathbf{n}|} \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})$

ordnen dem Punkt X die Projektionsgerade $\mathcal{G}(u, v)$ zu, auf welcher er liegt. Die Gleichungen ergeben sich im Beweis des Satzes 5.2.1 aus den Gleichungen (5.51), (5.53) und (5.58) bis (5.60).

Es ist sinnvoll, sich auf Aufnahmegeometrien zu beschränken, die jedem Punkt des betrachteten Objektbereiches \mathcal{K} einen Bildpunkt mit endlichen Koordinaten u und v zuordnen. Deshalb muss für jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ die Bedingung $(\mathbf{f} \times \mathbf{n}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}) \neq 0$ erfüllt sein. \mathcal{K} ist sinnvollerweise zusammenhängend, so dass das Vorzeichen von $(\mathbf{f} \times \mathbf{n}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ gleich ist. Die Größen $h_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{af}}[w]$ und $J_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{af}}[w]$ sind gleichermaßen wie $J_{\mathbf{q}, \mathbf{m}}[w]$ auf Grund ihrer Definition bezüglich w linear.

Beweis von Satz 5.2.1:

Durch Einsetzen von Gleichung (2.44) in die Definitionsgleichung des Momentes des Projektionsbildes (5.40) ergibt sich

$$J_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{af}}[w] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(u, v) |\mathbf{r} + u\mathbf{af}| \mu(\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{af}}(u, v, t)) dt du dv. \quad (5.46)$$

Durch Anwendung von Gleichung (5.44) wird daraus

$$J_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{af}}[w] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \bar{w}(u, v) \mu(\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{af}}(u, v, t)) du dv dt. \quad (5.47)$$

Dieses Integral ist ein Integral über den gesamten Raum in Fächerscharkoordinaten. Es wird im Folgenden mittels der Substitution $\mathbf{x} = \mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{af}}(u, v, t)$ in ein Integral in kartesischen Koordinaten überführt. Für die Koordinaten ergibt sich mit Gleichung (2.41)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{(\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{af})1} \\ p_{(\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{af})2} \\ p_{(\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{af})3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1 & r_1 & af_1 \\ n_2 & r_2 & af_2 \\ n_3 & r_3 & af_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ t \\ ut \end{pmatrix}. \quad (5.48)$$

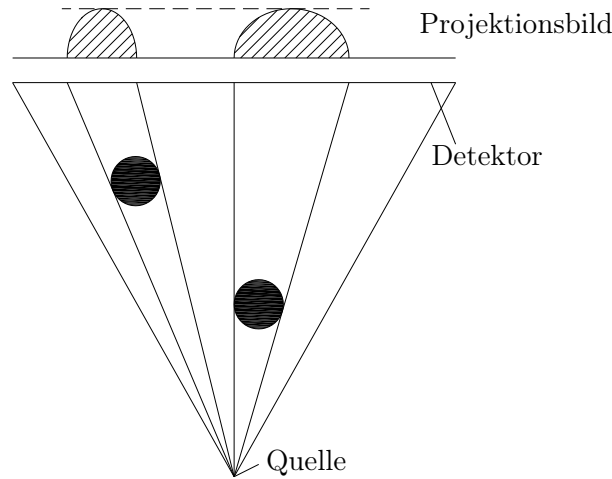


Abbildung 5.5.: Wirkung des Vergrößerungseffektes bei Fächerscharprojektionen

Sie werden als neue Integrationsvariable benutzt. Damit folgt aus Gleichung (5.48)

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} n_1 & r_1 & af_1 \\ n_2 & r_2 & af_2 \\ n_3 & r_3 & af_3 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & u & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dv \\ dt \\ du \end{pmatrix}. \quad (5.49)$$

Unter Anwendung der Transformationsformel gilt für das Volumenelement¹

$$dx_1 dx_2 dx_3 = |\det(\mathbf{A})| |t| dudvdt. \quad (5.50)$$

Zur Ermittlung von u , v , t aus x_1 , x_2 , x_3 wird die Gleichung (5.48) umgestellt und ergibt

$$v = [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q})]_1, \quad (5.51)$$

$$t = [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q})]_2, \quad (5.52)$$

$$u = [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q})]_3 / [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q})]_2. \quad (5.53)$$

Nach Einsetzen in Gleichung (5.50) folgt

$$dudvdt = \frac{1}{|\det(\mathbf{A})| |[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q})]_2|} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (5.54)$$

Mit den Gleichungen (5.51) bis (5.54) lassen sich aus Gleichung (5.47) die Momente

$$J_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, r, af}[w] = \frac{1}{|\det(\mathbf{A})|} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \bar{w}\left(\frac{[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q})]_3}{[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q})]_2}, [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q})]_1\right) \mu(\mathbf{x}) \frac{1}{|[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q})]_2|} dx_1 dx_2 dx_3$$

beziehungsweise

$$J_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, r, af}[w] = \frac{1}{|\det(\mathbf{A})|} \int_{\mathbb{R}^3} \bar{w}\left(\frac{[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q})]_3}{[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q})]_2}, [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q})]_1\right) \frac{\mu(\mathbf{x})}{|[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q})]_2|} d^3\mathbf{x} \quad (5.55)$$

¹Das Volumenelement wird exakt als die 3-Form $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ definiert [29].

in kartesischen Koordinaten gewinnen. Im Folgenden wird \mathbf{A}^{-1} durch die drei Vektoren \mathbf{n} , \mathbf{r} und \mathbf{f} ausgedrückt. Bekanntlich besitzt jede reguläre Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

die inverse Matrix

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{B})} \begin{pmatrix} - & (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)^T & - \\ - & (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1)^T & - \\ - & (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)^T & - \end{pmatrix}. \quad (5.56)$$

Demnach ist

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a \det(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{f})} \begin{pmatrix} - & a(\mathbf{r} \times \mathbf{f})^T & - \\ - & a(\mathbf{f} \times \mathbf{n})^T & - \\ - & (\mathbf{n} \times \mathbf{r})^T & - \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

und es gilt

$$[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q})]_1 = \frac{1}{\det(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{f})} (\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}), \quad (5.58)$$

$$[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q})]_2 = \frac{1}{\det(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{f})} (\mathbf{f} \times \mathbf{n}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}), \quad (5.59)$$

$$[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{q})]_3 = \frac{1}{a \det(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{f})} (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}). \quad (5.60)$$

Durch Einsetzen dieser Beziehungen in Gleichung (5.55) folgt

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, a\mathbf{f}}[w] &= \frac{1}{|a|} \frac{|\det(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{f})|}{|\det(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{f})|} \int_{\mathbb{R}^3} \bar{w} \left(\frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})}{a(\mathbf{f} \times \mathbf{n}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})}, \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})}{\det(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{f})} \right) \\ &\quad \cdot \frac{\mu(\mathbf{x})}{|(\mathbf{f} \times \mathbf{n}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})|} d^3\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

□

Aus Satz (5.2.1) ergibt sich speziell für das Moment $J_{k_u, k_v} := J_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, a\mathbf{f}}[\bullet_1^{k_u}, \bullet_2^{k_v}]$ des Bildes k_u -ter Ordnung in u -Richtung und k_v -ter Ordnung in v -Richtung zu

$$J_{k_u, k_v} = s \int_{\mathbb{R}^3} \frac{((\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}))^{k_u}}{a^{k_u+1} ((\mathbf{f} \times \mathbf{n}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}))^{k_u+1}} \left(\frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})}{\det(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{f})} \right)^{k_v} \mu(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \quad (5.62)$$

mit $s = \text{sign}(a(\mathbf{f} \times \mathbf{n}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}))$. Falls $s = -1$ gilt, lässt sich durch Richtungsumkehr von \mathbf{f} stets zu einer neuen Beschreibung der Fächerschar übergehen, in der $s = 1$ gilt. Nachfolgend wird stets von $s = 1$ ausgegangen.

Für den Fall stückweise gerader Detektorlinien lassen sich die im Satz 5.2.1 abgeleiteten Formeln übertragen, indem die Funktion h für diesen Fall stückweise aus den $h_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, a\mathbf{f}}[w]$ der einzelnen ebenen Fächerscharen zusammengesetzt wird. Das heißt

$$h[w](\mathbf{x}) = h_{\mathbf{q}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, a_i \mathbf{f}_i}[w](\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathcal{S}_i, i = 1, \dots, N_D, \quad (5.63)$$

wobei $\mathcal{S}_i \subset \mathbb{R}^3$ der Bereich ist, auf dem die Fächerschar zum i -ten Geradenstück der Detektorlinie definiert ist. $N_D \in \mathbb{N}$ ist die Anzahl der Geradenstücke der Detektorlinie.

Umparametrisierung

Für die spätere Verwendung wird die Frage untersucht, ob es Umparametrisierungen gibt, die eine Fächerschargeometrie in eine andere überführen.

Dazu wird zunächst der Fall (Abbildung 5.6) betrachtet, dass von einer Aufnahmegeometrie mit der Detektorgeradenrichtung \mathbf{f} in eine Aufnahmegeometrie mit der neuen Detektorgeradenrichtung $\bar{\mathbf{f}}$ umgerechnet wird. Die anderen Parameter \mathbf{q} , \mathbf{r} , \mathbf{n} der Aufnahmegeometrie ändern sich in diesem Fall nicht. Es soll also

$$\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, a \mathbf{f}}(u, v, t) = \mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, a \bar{\mathbf{f}}}(\bar{u}, v, \bar{t}) \quad (5.64)$$

gelten, wobei $\bar{\mathbf{f}}$ in der durch \mathbf{r} und \mathbf{f} aufgespannten Ebene liege. Mit Gleichung (2.41) folgt daraus

$$t \mathbf{r} + u t a \mathbf{f} = \bar{t} \mathbf{r} + \bar{u} \bar{t} a \bar{\mathbf{f}}. \quad (5.65)$$

Mit $\lambda := t/\bar{t}$ ergibt sich

$$\lambda(\mathbf{r} + u a \mathbf{f}) = \mathbf{r} + \bar{u} a \bar{\mathbf{f}}.$$

Durch Bilden von Kreuzprodukten folgt daraus

$$\lambda u \mathbf{f} \times \mathbf{r} = \bar{u} \bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}, \quad (5.66)$$

$$\lambda \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \bar{u} a \bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{f}. \quad (5.67)$$

Die linken Seiten der Gleichungen (5.66) und (5.67) sind bis auf den Faktor $-u$ gleich. Es gilt

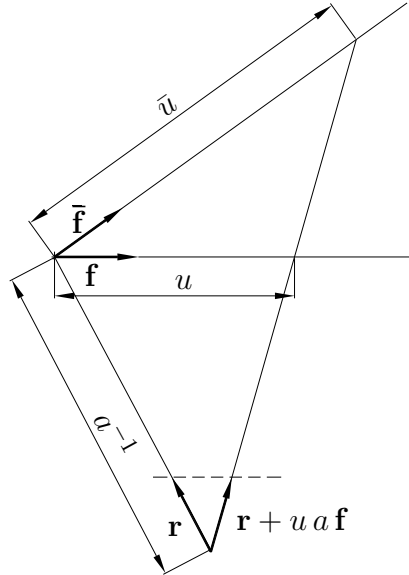


Abbildung 5.6.: Umparametrisierung einer Fächerschargeometrie

also

$$\bar{u} \bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r} = -u \mathbf{r} \times \mathbf{f} - u a \bar{u} \bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{f}. \quad (5.68)$$

Durch Skalarproduktbildung mit \mathbf{n} und anschließendes Umstellen ergibt sich

$$\bar{u} = u \frac{(\mathbf{f} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n}}{(\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n} + u a (\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{f}) \circ \mathbf{n}}. \quad (5.69)$$

Durch Einsetzen in Gleichung (5.66) erhält man

$$\lambda = \frac{\bar{u} (\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n}}{u (\mathbf{f} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n}} = \frac{(\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n}}{(\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n} + u a (\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{f}) \circ \mathbf{n}} \quad (5.70)$$

und schließlich

$$\bar{t} = t \frac{(\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n} + u a (\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{f}) \circ \mathbf{n}}{(\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n}}. \quad (5.71)$$

Nach dem Einsetzen der Gleichungen (5.69) und (5.71) in Gleichung (5.64) ergibt sich

$$\mathbf{p}_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},af}(u,v,t) = \mathbf{p}_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},a\bar{\mathbf{f}}} \left(u \frac{(\mathbf{f} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n}}{(\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n} + u a (\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{f}) \circ \mathbf{n}}, v, t \frac{(\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n} + u a (\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{f}) \circ \mathbf{n}}{(\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n}} \right). \quad (5.72)$$

Diese Gleichung kann für die geometrische Entzerrung benutzt werden.

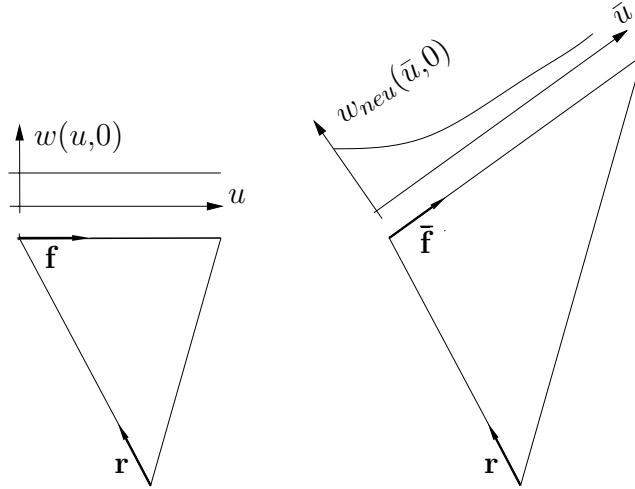


Abbildung 5.7.: Änderung der Bildwichtungsfunktion w bei Umparametrisierung

Da das Projektionsbild nur von den durch die Koordinaten u und v beschriebenen Projektionsgeraden abhängt, gilt für die Werte des Projektionsbildes

$$L_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},af}(u,v) = L_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},a\bar{\mathbf{f}}} \left(u \frac{(\mathbf{f} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n}}{(\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n} + u a (\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{f}) \circ \mathbf{n}}, v \right). \quad (5.73)$$

Für die Momente gilt

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},af}[w] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(u,v) L_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},af}(u,v) du dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(u,v) L_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},a\bar{\mathbf{f}}}(\bar{u},v) du dv. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Aus Gleichung (5.69) folgt wegen Symmetrie bezüglich Vertauschen von alter und neuer Fächer-schargeometrie

$$u = \bar{u} \frac{(\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n}}{(\mathbf{f} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n} + \bar{u} a (\mathbf{f} \times \bar{\mathbf{f}}) \circ \mathbf{n}} = \frac{(\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n}}{\bar{u}^{-1} (\mathbf{f} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n} + a (\mathbf{f} \times \bar{\mathbf{f}}) \circ \mathbf{n}}. \quad (5.75)$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{du}{d\bar{u}} = \frac{((\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n}) ((\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n})}{((\mathbf{f} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n} + \bar{u} a (\mathbf{f} \times \bar{\mathbf{f}}) \circ \mathbf{n})^2}. \quad (5.76)$$

Durch Einsetzen in Gleichung (5.74) folgt

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, a\mathbf{f}}[w] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n}}{((\mathbf{f} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n} + \bar{u} a (\mathbf{f} \times \bar{\mathbf{f}}) \circ \mathbf{n})^2} \\ &\quad w \left(\bar{u} \frac{(\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n}}{(\mathbf{f} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n} + \bar{u} a (\mathbf{f} \times \bar{\mathbf{f}}) \circ \mathbf{n}}, v \right) L_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, a\bar{\mathbf{f}}}(\bar{u}, v) d\bar{u} dv \\ &= J_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, a\bar{\mathbf{f}}}[w_{neu}] \end{aligned} \quad (5.77)$$

mit

$$w_{neu}(\bar{u}, v) = \frac{(\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n}}{((\mathbf{f} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n} + \bar{u} a (\mathbf{f} \times \bar{\mathbf{f}}) \circ \mathbf{n})^2} w \left(\bar{u} \frac{(\bar{\mathbf{f}} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n}}{(\mathbf{f} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{n} + \bar{u} a (\mathbf{f} \times \bar{\mathbf{f}}) \circ \mathbf{n}}, v \right). \quad (5.78)$$

Die Änderung der Bildwichtungsfunktion w ist in Abbildung 5.7 dargestellt. Diese Umparametrisierung wird in Abschnitt 6.2.1 verwendet, um möglichst genaue Näherungen zu erhalten.

Des Weiteren wird die Umparametrisierung in den Bildkoordinaten u und v untersucht. Es gilt

$$\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, a\mathbf{f}}(\bar{u} - c_u, \bar{v} - c_v, t) = \mathbf{q} + (\bar{v} - c_v)\mathbf{n} + t\mathbf{r} + (\bar{u} - c_u)t\mathbf{a}\mathbf{f} \quad (5.79)$$

$$= \mathbf{q} - c_v\mathbf{n} + t(\mathbf{r} - c_u a\mathbf{f}) + \bar{v}\mathbf{n} + \bar{u} t a\mathbf{f} \quad (5.80)$$

und somit gilt

$$\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, a\mathbf{f}}(\bar{u} - c_u, \bar{v} - c_v, t) = \mathbf{p}_{\mathbf{q} - c_v\mathbf{n}, \mathbf{n}, \mathbf{r} - c_u a\mathbf{f}, a\mathbf{f}}(\bar{u}, \bar{v}, t). \quad (5.81)$$

Diese Eigenschaft überträgt sich auch auf die Werte der Bilder

$$L_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, a\mathbf{f}}(\bar{u} - c_u, \bar{v} - c_v) = L_{\mathbf{q} - c_v\mathbf{n}, \mathbf{n}, \mathbf{r} - c_u a\mathbf{f}, a\mathbf{f}}(\bar{u}, \bar{v}, t) \quad (5.82)$$

und der Momente

$$J_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, a\mathbf{f}}[w(\bullet_1 - c_u, \bullet_2 - c_v)] = J_{\mathbf{q} - c_v\mathbf{n}, \mathbf{n}, \mathbf{r} - c_u a\mathbf{f}, a\mathbf{f}}[w(\bullet_1, \bullet_2)]. \quad (5.83)$$

Mit dem *Fundamentallemma der Variationsrechnung*² [30, 31] folgt für die Objektwichtungsfunktionen

$$h_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, a\mathbf{f}}[w(\bullet_1 - c_u, \bullet_2 - c_v)] = h_{\mathbf{q} - c_v\mathbf{n}, \mathbf{n}, \mathbf{r} - c_u a\mathbf{f}, a\mathbf{f}}[w(\bullet_1, \bullet_2)]. \quad (5.84)$$

Der Parameterwechsel im zweiten Argument entspricht einer Verschiebung der Aufnahmegeometrie in Führungsgeradenrichtung. Diese Eigenschaft wird insbesondere in Abschnitt 6.2.3 genutzt, um den Rechenaufwand um Größenordnungen zu reduzieren.

²entspricht dem *Lemma von du Bois-Reymond*

5.3. Transformation von Momenten bei Lage- und Formänderungen

Aus den bekannten Momenten eines Objektes können die entsprechenden Momente nach Lageveränderung und homogener Formänderung bestimmt werden. Für die Momente erster und zweiter Ordnung gelten die bekannten Berechnungsvorschriften wie Schwerpunktverschiebung oder der *Satz von Steiner* [16]. Nachfolgend wird eine Berechnungsvorschrift für die Momente höherer Ordnung entwickelt. Jeweils eine Lageveränderung und eine homogene Formänderung können gemeinsam durch eine affine Transformation beschrieben werden. Die affine Koordinatentransformation $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist durch

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}}_{:=\bar{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}}_{:=\mathbf{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{:=\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}}_{:=\mathbf{s}} \quad (5.85)$$

gegeben. Für die transformierte Schwächungskoeffizientenverteilung $\bar{\mu}$ gilt dann

$$\bar{\mu}(\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{s}) = |\det \mathbf{T}|^{-1} \mu(\mathbf{x}) \quad (5.86)$$

beziehungsweise

$$\bar{\mu}(\bar{\mathbf{x}}) = |\det \mathbf{T}|^{-1} \mu(\mathbf{T}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{s})) . \quad (5.87)$$

Die Momente \bar{M} der transformierten Dichteverteilung ergeben sich damit zu

$$\bar{M}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N) = \int_{\mathbb{R}^n} |\det \mathbf{T}|^{-1} \mu(\mathbf{T}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{s})) (\mathbf{a}_1 \circ \bar{\mathbf{x}}) \cdot \dots \cdot (\mathbf{a}_N \circ \bar{\mathbf{x}}) d^n \bar{\mathbf{x}} . \quad (5.88)$$

Durch Anwendung der Substitution $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{s})$ lässt sich $\bar{M}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N)$ zu

$$\bar{M}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\mathbf{x}) (\mathbf{a}_1 \circ (\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{s})) \cdot \dots \cdot (\mathbf{a}_N \circ (\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{s})) d^n \mathbf{x} \quad (5.89)$$

umformen. Durch Ausmultiplizieren dieser Gleichung erhält man die Momente der transformierten Dichteverteilung, in denen nur die Momente der Ausgangslage vorkommen. Die auf diese Weise gewonnenen Ausdrücke sind für Momente höherer Ordnung sehr komplex. Um eine einfache Darstellung zu erhalten, werden die zusammengefassten Momente

$$M_{(H)i_1, \dots, i_N} := \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{H}(\mathbf{x})_{i_1} \cdot \dots \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x})_{i_N} \mu(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \quad (5.90)$$

eingeführt. Dabei ist

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} . \quad (5.91)$$

Da $\mathbf{H}(\mathbf{x})_0 = 1$ ist, sind in $M_{(H)i_1, \dots, i_N}$ alle Momente bis zur Ordnung N enthalten. Die nicht zusammengefassten Momente erhält man durch Weglassen aller nicht von Null verschiedenen Indizes, zum Beispiel $M_{(H)03} = M_3$ oder $M_{(H)1020} = M_{12}$. Die Transformation lautet in kurzer Schreibweise

$$\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})_i = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x})_j , \quad (5.92)$$

wobei

$$\mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{s} & \mathbf{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1 & t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \quad (5.93)$$

ist. Mit dieser Darstellung für die Momente lässt sich die folgende einfache Berechnungsvorschrift angeben.

Satz 5.3.1 *Es seien $n \in \mathbb{N}$ die Dimension des Raumes, $N \in \mathbb{N}$ die maximale Ordnung der betrachteten Momente und $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Dichteverteilung der Schwächungskoeffizienten. Ferner werde durch $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ die affine Transformation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{s}$ beschrieben. Die zusammengefassten Momente der Dichteverteilung μ seien*

$$M_{(H)i_1, \dots, i_N} := \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{H}(\mathbf{x})_{i_1} \cdot \dots \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x})_{i_N} \mu(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \quad (5.94)$$

für alle $i_1, \dots, i_N = 0, \dots, n$. Die zusammengefassten Momente der transformierten Dichteverteilung $|\det \mathbf{T}|^{-1} \mu(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{s}))$ seien

$$\bar{M}_{(H)i_1, \dots, i_N} := |\det \mathbf{T}|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{H}(\mathbf{x})_{i_1} \cdot \dots \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x})_{i_N} \mu(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{s})) d^n \mathbf{x} \quad (5.95)$$

für alle $i_1, \dots, i_N = 0, \dots, n$. Dann gilt

$$\bar{M}_{(H)i_1, \dots, i_N} = \sum_{j_1=0}^n \cdots \sum_{j_N=0}^n \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{i_N j_N} M_{(H)j_1, \dots, j_N}. \quad (5.96)$$

Beweis:

Die Momente der transformierten Dichteverteilung sind laut Definition

$$\bar{M}_{(H)i_1, \dots, i_N} := |\det \mathbf{T}|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})_{i_1} \cdot \dots \cdot \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}})_{i_N} \mu(\mathbf{T}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{s})) d^n \bar{\mathbf{x}}.$$

Führt man die Substitution $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{s})$ durch, ergibt sich nach der Transformationsformel

$$\bar{M}_{(H)i_1, \dots, i_N} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{H}(\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{s})_{i_1} \cdot \dots \cdot \mathbf{H}(\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{s})_{i_N} \mu(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}. \quad (5.97)$$

Es gilt per Definition

$$(\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{s})_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} x_j + s_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.98)$$

Mit

$$\mathbf{H}(\mathbf{x})_i = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ x_i & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (5.99)$$

und

$$\mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{ij} = \begin{cases} 1 & i = 0, & j = 0 \\ 0 & i = 0, & j = 1, \dots, n \\ t_{ij} & i = 1, & j = 1, \dots, n \\ s_i & i = 1, \dots, n, & j = 0 \end{cases} \quad (5.100)$$

wird aus Gleichung (5.98)

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{s})_i &= \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x})_j + \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{i0} \mathbf{H}(\mathbf{x})_0 \\ &= \sum_{j=0}^n \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x})_j, \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}\tag{5.101}$$

Aus Gleichungen (5.99) und (5.100) ergibt sich außerdem

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{s})_0 &= 1 = \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{00} + \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{0j} \mathbf{H}(\mathbf{x})_j \\ &= \sum_{j=0}^n \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{0j} \mathbf{H}(\mathbf{x})_j.\end{aligned}\tag{5.102}$$

Aus Gleichungen (5.101) und (5.102) folgt

$$\mathbf{H}(\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{s})_i = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x})_j, \quad i = 0, \dots, n.$$

Durch Einsetzen dieser Beziehung in Gleichung (5.97) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}\bar{M}_{(H)i_1, \dots, i_N} &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j_1=0}^n \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{i_1 j_1} \mathbf{H}(\mathbf{x})_{j_1} \cdot \dots \cdot \sum_{j_N=0}^n \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{i_N j_N} \mathbf{H}(\mathbf{x})_{j_N} \mu(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \\ &= \sum_{j_1=0}^n \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot \sum_{j_N=0}^n \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{i_N j_N} \cdot \\ &\quad \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{H}(\mathbf{x})_{j_1} \cdot \dots \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x})_{j_N} \mu(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \\ &= \sum_{j_1=0}^n \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot \sum_{j_N=0}^n \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{i_N j_N} M_{(H)j_1, \dots, j_N}.\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Die Transformationsformel (5.96) lässt sich mit dem *Fundamentallemma der Variationsrechnung* auch auf die Momentenfunktionen

$$f_{(H)i_1, \dots, i_N}(\mathbf{x}) := \mathbf{H}(\mathbf{x})_{i_1} \cdot \dots \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x})_{i_N}, \quad i_1, \dots, i_N = 0, \dots, n,\tag{5.103}$$

$$\bar{f}_{(H)i_1, \dots, i_N}(\mathbf{x}) := \mathbf{H}(\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{s})_{i_1} \cdot \dots \cdot \mathbf{H}(\mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{s})_{i_N}, \quad i_1, \dots, i_N = 0, \dots, n\tag{5.104}$$

übertragen. Es gilt also für die Momentenfunktionen $\bar{f}_{(H)i_1, \dots, i_N}$ des transformierten Momentes

$$\bar{f}_{(H)i_1, \dots, i_N} = \sum_{j_1=0}^n \dots \sum_{j_N=0}^n \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{i_N j_N} f_{(H)j_1, \dots, j_N}, \quad i_1, \dots, i_N = 0, \dots, n.\tag{5.105}$$

Im Folgenden wird Satz 5.3.1 auf die speziellen Fälle der Transformation der Momente nullter, erster und zweiter Ordnung angewandt.

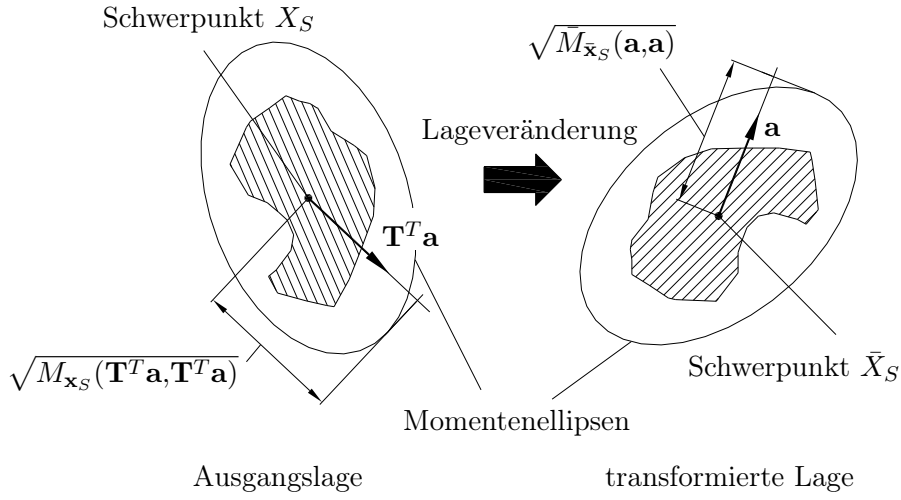


Abbildung 5.8.: Transformation von Schwerpunkt und Momentenellipse

Für das Moment nullter Ordnung gilt $\bar{M}_{(H)} = M_{(H)}$. Daraus folgt mit der Definition (5.90) der zusammengefassten Momente

$$\bar{M} = M. \quad (5.106)$$

Für das Moment erster Ordnung gilt $\bar{M}_{(H)i_1} = \sum_{j_1=0}^n \mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})_{i_1 j_1} M_{(H)j_1}$. Daraus folgt mit Gleichung (5.90) und der Definition (5.93) von $\mathbf{P}(\mathbf{T}, \mathbf{s})$

$$\bar{M}_{i_1} = \sum_{j_1=1}^n (t_{i_1 j_1} M_{j_1} + s_{i_1} M). \quad (5.107)$$

Mit Gleichung (2.59) ergibt sich

$$\bar{M}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i (t_{ij} M_j + s_i M) \quad (5.108)$$

$$= M(\mathbf{T}^T \mathbf{a}) + \mathbf{a} \circ \mathbf{s} \quad (5.109)$$

für jedes $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Für den Schwerpunkt

$$\bar{\mathbf{x}}_S = \frac{1}{\bar{M}} \begin{pmatrix} \bar{M}_1 \\ \vdots \\ \bar{M}_n \end{pmatrix} \quad (5.110)$$

folgt aus den Gleichungen (5.106) und (5.107)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{S,i} &= \frac{1}{\bar{M}} \sum_{j=1}^n (t_{ij} M_j + s_i M) \\ &= \sum_{j=1}^n (t_{i,j} \mathbf{x}_{S,j} + s_j). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die bekannte Gleichung

$$\bar{\mathbf{x}}_S = \mathbf{T}\mathbf{x}_S + \mathbf{s} \quad (5.111)$$

für die Transformation des Schwerpunktes.

Für die Momente zweiter Ordnung gilt

$$\bar{M}_{(H)i_1,i_2} = \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^n \mathbf{P}(\mathbf{T},\mathbf{s})_{i_1j_1} \mathbf{P}(\mathbf{T},\mathbf{s})_{i_2j_2} M_{(H)j_1,j_2}, \quad i_1, i_2 = 0, \dots, n.$$

Für $i_1, i_2 \geq 1$ folgt somit

$$\begin{aligned} \bar{M}_{(H)i_1,i_2} &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{T},\mathbf{s})_{i_1j_1}}_{t_{i_1j_1}} \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{T},\mathbf{s})_{i_2j_2}}_{t_{i_2j_2}} \underbrace{M_{(H)j_1,j_2}}_{M_{j_1,j_2}} + \\ &+ \sum_{j_1=1}^n \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{T},\mathbf{s})_{i_1j_1}}_{t_{i_1j_1}} \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{T},\mathbf{s})_{i_20}}_{s_{i_2}} \underbrace{M_{(H)j_1,0}}_{M_{j_1}} + \\ &+ \sum_{j_2=1}^n \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{T},\mathbf{s})_{i_10}}_{s_{i_1}} \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{T},\mathbf{s})_{i_2j_2}}_{t_{i_2j_2}} \underbrace{M_{(H)0,j_2}}_{M_{j_2}} + \\ &+ \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{T},\mathbf{s})_{i_10}}_{s_{i_1}} \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{T},\mathbf{s})_{i_20}}_{s_{i_2}} \underbrace{M_{(H)0,0}}_M \end{aligned}$$

und damit ergibt sich weiterhin

$$\begin{aligned} \bar{M}_{i_1,i_2} &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n t_{i_1j_1} t_{i_2j_2} M_{j_1,j_2} + \sum_{j_1=1}^n t_{i_1j_1} s_{i_2} M_{j_1} + \\ &+ \sum_{j_2=1}^n s_{i_1} t_{i_2j_2} M_{j_2} + s_{i_1} s_{i_2} M. \end{aligned} \quad (5.112)$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\bar{M}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = M(\mathbf{T}^T \mathbf{a}_1, \mathbf{T}^T \mathbf{a}_2) + M(\mathbf{T}^T \mathbf{a}_1)(\mathbf{s} \circ \mathbf{a}_2) + M(\mathbf{T}^T \mathbf{a}_2)(\mathbf{s} \circ \mathbf{a}_1) + (\mathbf{s} \circ \mathbf{a}_1)(\mathbf{s} \circ \mathbf{a}_2) M \quad (5.113)$$

für alle $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$. Die Momente $M_{\mathbf{x}_S}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ um den Schwerpunkt ergeben sich aus Gleichung (5.113), wenn $\mathbf{s} = -\mathbf{x}_S$ gilt und für \mathbf{T} die Identität gewählt wird zu

$$M_{\mathbf{x}_S}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) - M(\mathbf{a}_1)(\mathbf{x}_S \circ \mathbf{a}_2) - M(\mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_S \circ \mathbf{a}_1) + M(\mathbf{x}_S \circ \mathbf{a}_1)(\mathbf{x}_S \circ \mathbf{a}_2). \quad (5.114)$$

Daraus folgt mit Gleichung (2.63)

$$M_{\mathbf{x}_S}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) - \frac{1}{M} M(\mathbf{a}_1) M(\mathbf{a}_2), \quad \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n. \quad (5.115)$$

Für die Transformation der Momente um den Schwerpunkt kann insbesondere $\mathbf{s} = 0$ angenommen werden, da die Momente um den Schwerpunkt nicht von der Lage des Schwerpunktes abhängen. Damit ergibt sich die im Abschnitt 2.2 bereits verwendete Gleichung

$$\bar{M}_{\bar{\mathbf{x}}_S}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = M_{\mathbf{x}_S}(\mathbf{T}^T \mathbf{a}_1, \mathbf{T}^T \mathbf{a}_2). \quad (5.116)$$

Aus den Gleichungen (5.111) und (5.116) folgt, dass die Transformation des Momentenellipsoids eines Objektes das Momentenellipsoid des transformierten Objektes ergibt (Abbildung 5.8).

6. Algorithmus zur Positionswiederfindung

Die Bestimmung der Lageveränderung eines Gepäckstückes zwischen der Maschine der ersten Stufe und der Maschine der zweiten Stufe wird als Positionswiederfindung bezeichnet. Die in diesem Kapitel vorgestellten Algorithmen zur Positionswiederfindung basieren auf dem in Kapitel 5 ermittelten Zusammenhang zwischen den Momenten des Objektes und den Momenten der Projektionsbilder. Das Grundkonzept dieser Algorithmen wird vorgestellt und auf die Parallelstrahlgeometrie angewandt. Anschließend wird der Fall der Fächerschargeometrie betrachtet. Dieser Fall erfordert umfangreiche Näherungen, deren schrittweise Entwicklung einen großen Teil dieses Kapitels ausmacht.

6.1. Grundkonzept und Parallelstrahlprojektion

Das zur Positionswiederfindung entwickelte Verfahren ist in Abbildung 6.1 schematisch dargestellt.

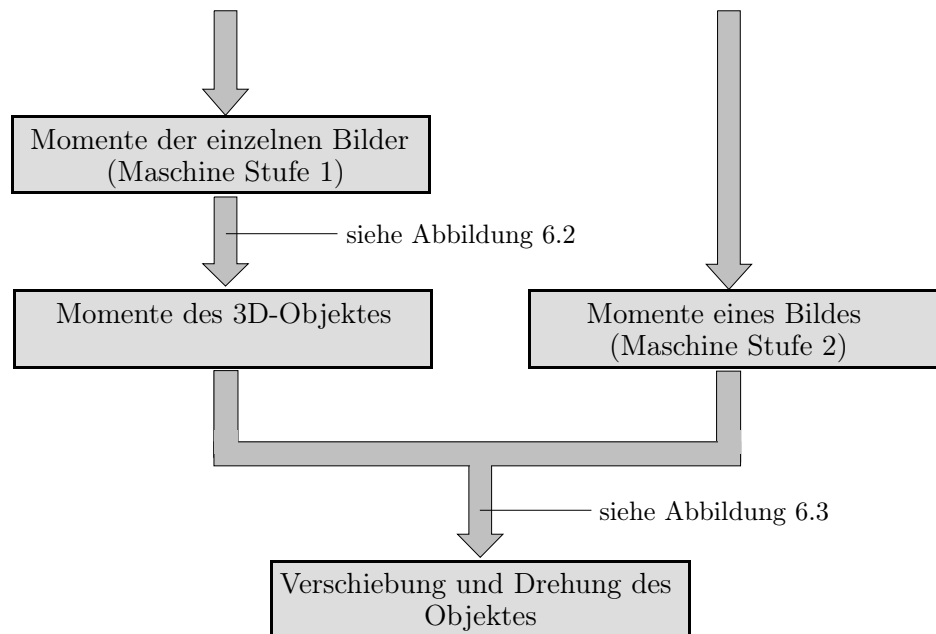


Abbildung 6.1.: Prinzip des Positionswiederfindungsalgorithmus

Wie gezeigt, werden zuerst die Momente des Objektes aus den Momenten der Projektionsbilder der ersten Maschine bestimmt. Der Zusammenhang zwischen den Momenten des Objektes der Maschine der ersten Stufe und den Momenten des lageveränderten Objektes und der Zusammenhang zwischen den Momenten des lageveränderten Objektes und den Momenten des Bildes der zweiten Maschine sind aus Kapitel 5 bekannt. Da von den in diesen Zusammenhängen vorkommenden Größen nur die Lageveränderung zwischen der ersten und der zweiten Maschine

unbekannt ist, kann diese aus den Momenten des Objektes der Maschine der ersten Stufe und den Momenten des Bildes der zweiten Maschine berechnet werden.

Die Positionswiederfindung wird zunächst am einfachen Fall der Parallelprojektion vorgestellt. Die Projektionsbilder der ersten Maschine seien so parametrisiert, dass $\mathbf{q} \circ \mathbf{m} = 0$ gilt. Dies ist, wie in Kapitel 5 dargestellt, immer möglich. Für die N Projektionsbilder gilt laut Gleichung (5.21) für die Momente erster Ordnung

$$J_{\bar{\mathbf{q}}_i, \mathbf{m}_i} [\bullet] = M(\mathbf{m}_i) = m_{(i)1}M_1 + m_{(i)2}M_2, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.1)$$

Betrachtet man je zwei der in Abbildung 6.2 dargestellten Projektionen, so ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die Bestimmung von M_1 und M_2 .

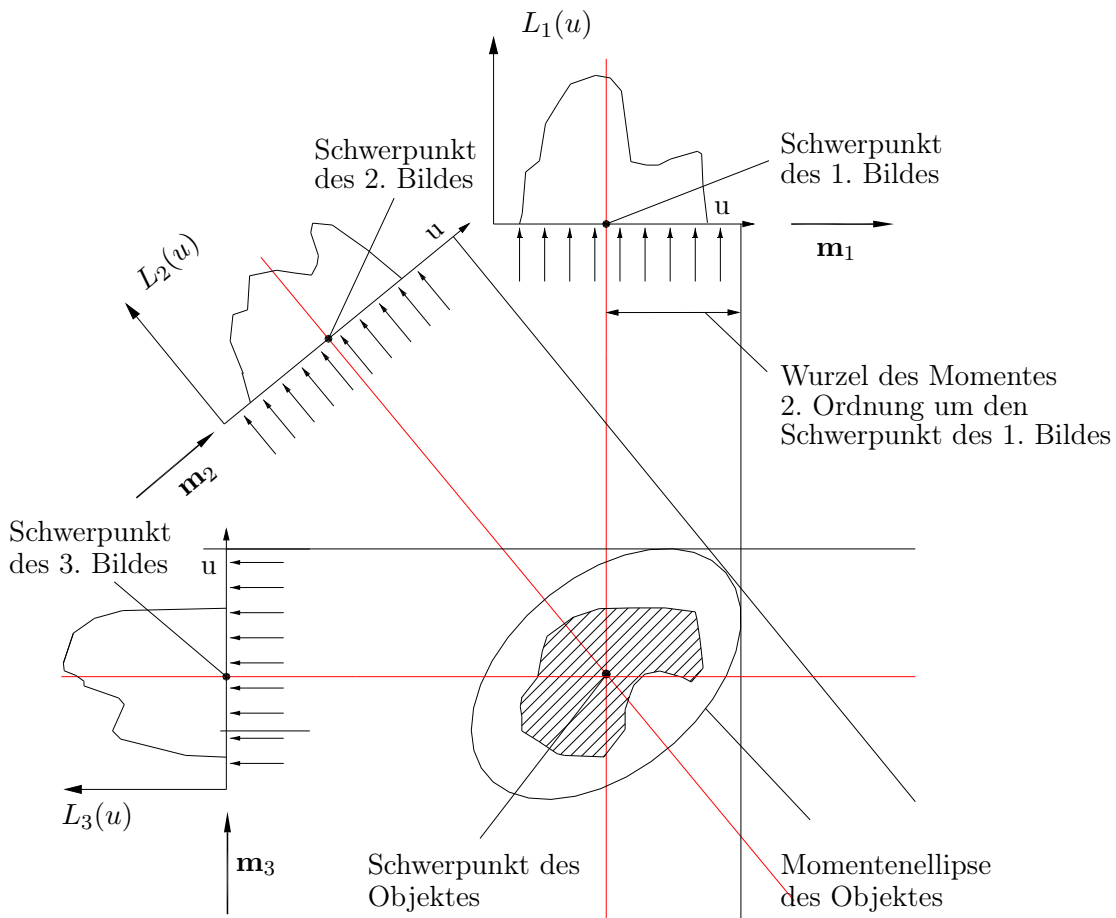


Abbildung 6.2.: Bestimmung der Momente des Objektes

Für die Momente zweiter Ordnung gilt für die einzelnen Projektionsbilder laut Gleichung (5.22) der Zusammenhang

$$J_{\bar{\mathbf{q}}_i, \mathbf{m}_i} [\bullet^2] = M(\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_i) \quad (6.2)$$

$$= m_{(i)1}m_{(i)1}M_{11} + 2m_{(i)1}m_{(i)2}M_{12} + m_{(i)2}m_{(i)2}M_{22}, \quad (6.3)$$

wobei $i = 1, \dots, N$ die Nummer der Projektion ist. Bereits aus drei Projektionsbildern ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die Bestimmung von M_{11} , M_{12} und M_{22} . Es lässt sich also,

wie in Abbildung 6.2 dargestellt, aus drei Projektionsbildern die Momentenellipse bestimmen. Auf dieselbe Weise bestimmen N Projektionsbilder ($N \geq 1$) über Gleichung (5.20) ein lineares Gleichungssystem, mit dem jeweils die Momente $(N - 1)$ -ter Ordnung ermittelt werden können.

Bei Verwendung eines körperfesten Koordinatensystems werden durch die Lageveränderung die Basisquelle $\tilde{\mathbf{q}}$ und die Detektorgeradenrichtung $\tilde{\mathbf{m}}$ der Aufnahmegeometrie der Maschine der zweiten Stufe beeinflusst. Die Lageveränderung lässt sich durch die direkte Berechnung von $\tilde{\mathbf{q}}$ und $\tilde{\mathbf{m}}$ bestimmen.

Dazu wird

- das Bild so parametrisiert, dass der Schwerpunkt des Bildes in dessen Koordinatenursprung liegt,
- anschließend die Basisquelle $\tilde{\mathbf{q}}$ gleich dem Schwerpunkt des Objektes gesetzt, da auf diese Weise der Schwerpunkt des Objektes unabhängig von $\tilde{\mathbf{m}}$ auf den Schwerpunkt des Bildes projiziert wird, und danach
- die Detektorrichtung $\tilde{\mathbf{m}}$ ermittelt, für die das Moment zweiter Ordnung um den Schwerpunkt des Objektes in Richtung $\tilde{\mathbf{m}}$ dem Moment zweiter Ordnung des Bildes entspricht.

Von den Momenten $J_{\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{m}}}$ des Bildes der zweiten Maschine werden im Folgenden

$$\begin{aligned} M &= J_{\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{m}}}[1], \\ J_1 &:= J_{\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{m}}}[\bullet], \\ J_2 &:= J_{\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{m}}}[\bullet^2] \end{aligned}$$

verwendet. Der Schwerpunkt des umparametrisierten Bildes liegt genau dann im Koordinatenursprung des Bildes, wenn die Bedingung

$$0 = J_{\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{m}}}[\bullet + c] = J_{\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{m}}}[\bullet] + c J_{\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{m}}}[1] \quad (6.4)$$

$$= J_1 + c M \quad (6.5)$$

erfüllt ist. Daraus folgt

$$c = -\frac{J_1}{M}. \quad (6.6)$$

Die Basisquelle $\tilde{\tilde{\mathbf{q}}}$ des umparametrisierten Bildes ist laut Gleichung (5.17)

$$\tilde{\tilde{\mathbf{q}}} = \tilde{\mathbf{q}} + c \tilde{\mathbf{m}}. \quad (6.7)$$

Diese Quelle wird mit dem Schwerpunkt \mathbf{x}_S des Objektes gleichgesetzt, es gilt demzufolge

$$\tilde{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{x}_S = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Um die Richtung $\tilde{\mathbf{m}}$ des Detektors zu bestimmen, wird das Moment zweiter Ordnung des umparametrisierten Bildes mit dem Moment zweiter Ordnung des Objektes um den Schwerpunkt verglichen. Es muss wegen Gleichung (5.22)

$$J_{\tilde{\tilde{\mathbf{q}}},\tilde{\mathbf{m}}}[\bullet^2] = M_{(\mathbf{x}_S)}(\tilde{\mathbf{m}},\tilde{\mathbf{m}}) \quad (6.9)$$

gelten. Dabei kann $J_{\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{m}}}[\bullet^2]$ unter Verwendung von Gleichung (6.6) über

$$\underbrace{J_{\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{m}}}[\bullet^2]}_{=: \bar{J}_2} = J_{\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{m}}}[(\bullet + c)^2] \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} &= J_{\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{m}}}[\bullet^2] + 2c J_{\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{m}}}[\bullet] + c^2 J_{\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{m}}}[1] \\ &= J_2 + 2c J_1 + c^2 M \\ &= J_2 - M^{-1} J_1^2 \end{aligned} \quad (6.11)$$

berechnet werden. $M_{\mathbf{x}_S}(\tilde{\mathbf{m}},\tilde{\mathbf{m}})$ ist über die aus Gleichung (5.115) folgende Beziehung

$$M_{\mathbf{x}_S}(\tilde{\mathbf{m}},\tilde{\mathbf{m}}) = M(\tilde{\mathbf{m}},\tilde{\mathbf{m}}) - \frac{1}{M} M(\tilde{\mathbf{m}})M(\tilde{\mathbf{m}}) \quad (6.12)$$

für jedes $\tilde{\mathbf{m}}$ aus bereits bestimmten Größen berechenbar. Für $\tilde{\mathbf{m}}$ wird die Beschreibung über den Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\tilde{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

gewählt. Aus Gleichung (6.9) wird damit

$$\bar{J}_2 = M_{(\mathbf{x}_S)11} \cos^2 \alpha + 2 M_{(\mathbf{x}_S)12} \cos \alpha \sin \alpha + M_{(\mathbf{x}_S)22} \sin^2 \alpha. \quad (6.14)$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Beziehungen

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\alpha)) , \quad (6.15)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\alpha)) , \quad (6.16)$$

$$2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin(2\alpha) \quad (6.17)$$

wird daraus

$$\underbrace{\bar{J}_2 - \frac{1}{2} (M_{(\mathbf{x}_S)11} + M_{(\mathbf{x}_S)22})}_{=: b_1} = \underbrace{\frac{1}{2} (M_{(\mathbf{x}_S)11} - M_{(\mathbf{x}_S)22}) \cos(2\alpha)}_{=: b_2} + \underbrace{M_{(\mathbf{x}_S)12} \sin(2\alpha)}_{=: b_3} \quad (6.18)$$

$$b_1 = b_2 \cos(2\alpha) + b_3 \sin(2\alpha). \quad (6.19)$$

Dabei ist $b_2 \cos(2\alpha) + b_3 \sin(2\alpha)$ der richtungsabhängige Anteil der Momente zweiter Ordnung um den Schwerpunkt.

Für alle $a, b, \phi \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ gilt

$$a \cos \phi + b \sin \phi = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\phi + \phi_0) \quad \text{mit} \quad \phi_0 = \arctan\left(\frac{a}{b}\right).$$

Aus Gleichung (6.19) folgt deshalb

$$b_1 = \sqrt{b_2^2 + b_3^2} \sin(2\alpha + \beta) \quad \text{mit} \quad (6.20)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{b_2}{b_3}\right). \quad (6.21)$$

Wenn $b_2 \neq 0$ oder $b_3 \neq 0$ gilt, ist die Momentenellipse kein Kreis. Dann lässt sich aus Gleichung (6.20) der Wert von α bestimmen. Es ergeben sich vier Lösungen α_i , $i = 1, \dots, 4$ zu

$$\alpha_{1/2} = \frac{1}{2} \left(\arcsin \left(\frac{b_2}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}} \right) - \alpha_0 + k 2\pi \right), \quad (6.22)$$

$$\alpha_{3/4} = \frac{1}{2} \left(\pi - \arcsin \left(\frac{b_2}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}} \right) - \alpha_0 + k 2\pi \right) \quad (6.23)$$

mit $k = 0$ und $k = 1$. Die grafische Darstellung dieser Lösungen ist in Abbildung 6.3 ersichtlich. Um unter diesen Lösungen die tatsächliche Projektionsrichtung der zweiten Maschine herauszufinden, wird ein zusätzlicher Vergleich zwischen den Momenten dritter Ordnung von Bild und Objekt durchgeführt.

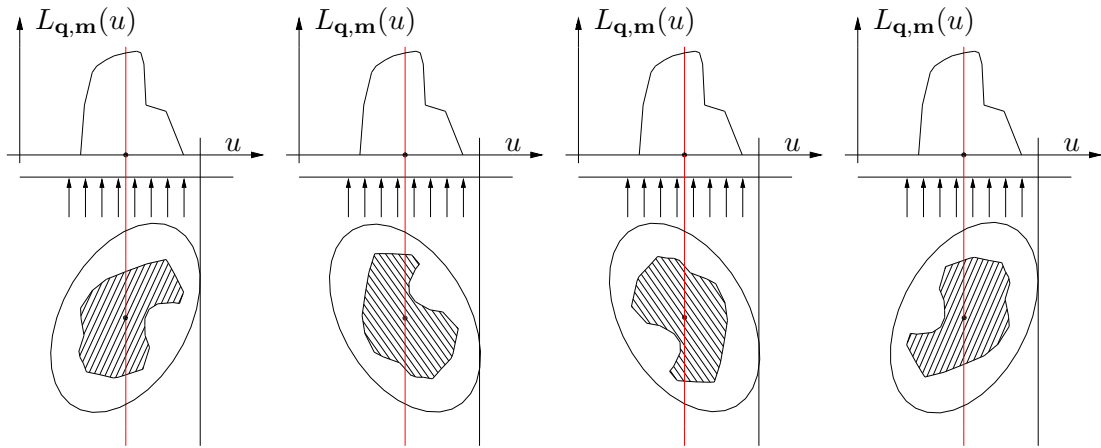


Abbildung 6.3.: Vier Lösungen zu den Momenten bis zur zweiten Ordnung

Zusammenfassung: Die Positionswiederfindung kann im Fall einer zweidimensionalen Parallelstrahlgeometrie durchgeführt werden, falls

- drei in nicht parallelen Richtungen aufgenommene Projektionsbilder der ersten Maschine vorhanden sind und
- die Momente zweiter Ordnung um den Schwerpunkt richtungsabhängig sind.

Die Positionswiederfindung schränkt die Lösung auf vier mögliche Werte ein. Durch Vergleich der Momente dritter Ordnung lässt sich aus diesen Werten die Lösung auswählen. Zur Bestimmung der Momente dritter Ordnung des Objektes ist ein weiteres Projektionsbild notwendig.

6.2. Algorithmus für Fächerscharprojektion

In Abschnitt 5.2 wurde ein Zusammenhang zwischen den Momenten des Bildes und bestimmten charakteristischen Größen des Objektes ermittelt. Zwischen diesen Größen und den Momenten des Objektes besteht, wie noch gezeigt wird, ein näherungsweiser Zusammenhang, so dass sich ein näherungsweiser Zusammenhang zwischen den Momenten des Bildes und den Momenten des Objektes finden lässt (Abbildung 6.4).

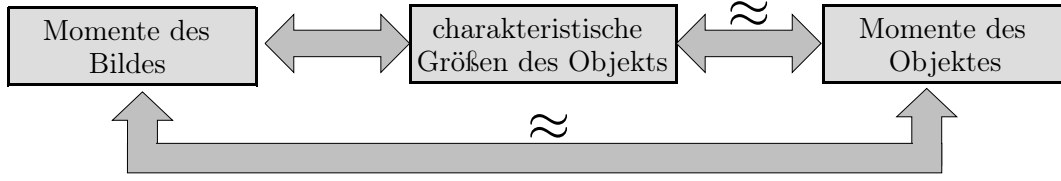


Abbildung 6.4.: Zusammenhang zwischen Momenten von Bild und Objekt im Fall der Fächerscharprojektionen

Mit diesem Zusammenhang kann analog zum Parallelstrahlfall ein Positionswiederfindungsalgorithmus für den Fall der Fächerscharprojektionen abgeleitet werden. Nachfolgend werden drei Varianten vorgestellt, die unterschiedliche Entwicklungsstufen des Algorithmus darstellen. In Kapitel 7 werden diese anhand von simulierten und praktischen Beispielen getestet.

6.2.1. Variante 1 - Näherung durch Potenzreihen

In dieser Variante werden die Momente des Bildes durch die Momente des Objektes mittels Potenzreihen genähert. Dadurch erhält man näherungsweise erfüllte lineare Beziehungen zwischen den Momenten von Bild und Objekt und kann wie bei der Parallelstrahlgeometrie vorgehen.

Das Moment $J_{l,k_u,k_v} := J_{\mathbf{q}_l, \mathbf{n}_l, \mathbf{r}_l, a_l \mathbf{f}_l}[\bullet_1^{k_u} \bullet_2^{k_v}]$ des Bildes der l -ten Fächerschar mit der Ordnung k_u in u -Richtung und der Ordnung k_v in v -Richtung lautet nach Gleichung (5.62)

$$J_{l,k_u,k_v} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{((\mathbf{n}_l \times \mathbf{r}_l) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_l))^{k_u}}{a_l^{k_u+1} ((\mathbf{f}_l \times \mathbf{n}_l) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_l))^{k_u+1}} \left(\frac{(\mathbf{r}_l \times \mathbf{f}_l) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_l)}{\det(\mathbf{n}_l, \mathbf{r}_l, \mathbf{f}_l)} \right)^{k_v} \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}. \quad (6.24)$$

Der in Gleichung (6.24) auftretende Nenner wird durch eine Potenzreihe der Ordnung k_P bezüglich $(\mathbf{f}_l \times \mathbf{n}_l) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_l) =: y_l$ entwickelt und ergibt

$$\frac{1}{a_l^{k_u+1} \det(\mathbf{n}_l, \mathbf{r}_l, \mathbf{f}_l)^{k_v}} \frac{1}{y_l^{k_u+1}} \approx \sum_{i=0}^{k_P} c_{l,k_u,i} y_l^i, \quad c_{l,k_u,i} \in \mathbb{R}. \quad (6.25)$$

Die Koeffizienten $c_{l,k_u,i} \in \mathbb{R}$ der Potenzreihe ergeben sich aus der Quadratmittelnäherung der linken Seite der Gleichung (6.25) im Intervall $[y_{l,min}, y_{l,max}]$. Dabei ist $[y_{l,min}, y_{l,max}]$ das kürzeste Intervall, so dass die Bedingung $y_l(\mathbf{x}) \in [y_{l,min}, y_{l,max}]$ für jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{K}$ erfüllt ist (Abbildung 6.5). Durch Uparametrisierung wird $\mathbf{f}_l \times \mathbf{n}_l$ so gewählt, dass $y_{l,max}/y_{l,min}$ klein ist und damit eine gute Näherung durch die Potenzreihe erreicht wird.¹

Durch Einsetzen von Gleichung (6.25) in Gleichung (6.24) ergibt sich

$$J_{l,k_u,k_v} \approx \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=0}^{k_P} c_{l,k_u,i} ((\mathbf{f}_l \times \mathbf{n}_l) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_l))^i ((\mathbf{n}_l \times \mathbf{r}_l) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_l))^{k_u} ((\mathbf{r}_l \times \mathbf{f}_l) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_l))^{k_v} \cdot \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} =: \tilde{J}_{l,k_u,k_v}. \quad (6.26)$$

¹Eine Schranke für den Näherungsfehler lässt sich durch Vergleich mit der Näherung mittels Taylorreihen erhalten.

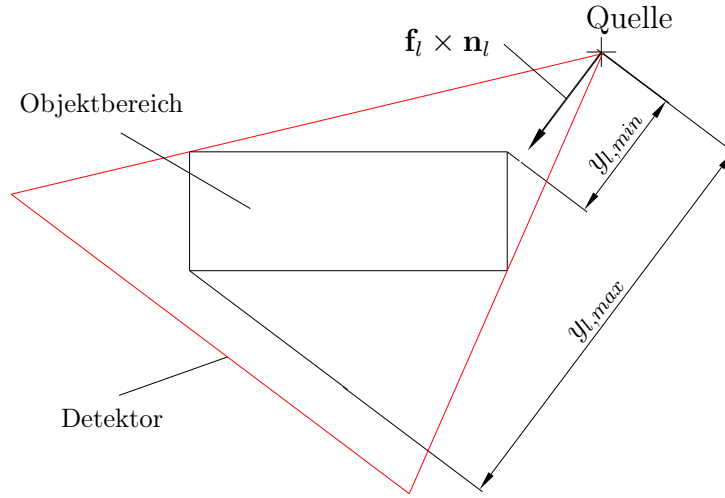


Abbildung 6.5.: Näherungsbereich

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}_{l,k_u,k_v} &= \sum_{i=0}^{k_P} c_{l,k_u,i} \int_{\mathbb{R}^3} ((\mathbf{f}_l \times \mathbf{n}_l) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_l))^i ((\mathbf{n}_l \times \mathbf{r}_l) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_l))^{k_u} \\
 &\quad \cdot ((\mathbf{r}_l \times \mathbf{f}_l) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_l))^{k_v} \mu(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \\
 &= \sum_{i=0}^{k_P} c_{l,k_u,i} M_{\mathbf{q}_l} \underbrace{(\mathbf{f}_l \times \mathbf{n}_l, \dots, \mathbf{f}_l \times \mathbf{n}_l)}_{i\text{-mal}}, \underbrace{(\mathbf{n}_l \times \mathbf{r}_l, \dots, \mathbf{n}_l \times \mathbf{r}_l)}_{k_u\text{-mal}}, \underbrace{(\mathbf{r}_l \times \mathbf{f}_l, \dots, \mathbf{r}_l \times \mathbf{f}_l)}_{k_v\text{-mal}}. \quad (6.27)
 \end{aligned}$$

Die maximale Ordnung der in Gleichung (6.27) auftretenden Objektmomente ist $k_M := k_P + k_u + k_v$. Die in Gleichung (6.27) auftretenden, um die Basisquelle \mathbf{q} zentrierten Momente der Ordnung i sind nach Abschnitt 5.3 Linearkombinationen der um den Koordinatenursprung zentrierten Momente bis zur Ordnung i . Die Gleichung (6.27) wird im Folgenden verwendet, um ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Momente des Objektes bis zur Ordnung k_M um den Koordinatenursprung aufzustellen.

Die Zahl N_M der Objektmomente bis zu Ordnung k_M und damit der Unbekannten beträgt $N_M = (k_M + 3)!/(k_M!3!)$. Diese Zahl ergibt sich aus der Betrachtung der Kombinationen, mit denen k_M Faktoren aus der Menge $\{1, x_1, x_2, x_3\}$ ausgewählt werden können.

Gleichung (6.27) beschreibt die Beziehung zwischen den Näherungen \tilde{J}_{l,k_u,k_v} für die Bildmomente J_{l,k_u,k_v} und den Objektmomenten. Der Näherungsfehler ist umso kleiner, je größer die Ordnung k_P der verwendeten Potenzreihe ist. Wegen $k_P = k_M - k_u - k_v$ verringert sich der Näherungsfehler auch mit steigendem k_M . In diesem Fall ergibt sich eine größere Anzahl von Gleichungen, deren Näherung genau genug ist, um sie innerhalb des linearen Gleichungssystems zu verwenden. Wegen $k_u + k_v \leq k_M$ ist die Zahl der Gleichungen pro Projektion kleinergleich $k_M + 1 =: N_B$. Die Anzahl der für die Maschine der Stufe 1 zur Verfügung stehenden Gleichungen N_{Gleich} muss größer sein als die Anzahl der Unbekannten N_M . Wenn genügend Projektionen vorhanden sind, lässt sich für bestimmte k_M das Gleichungssystem eindeutig lösen. N_{Gleich} ist kleiner als das Produkt der Anzahl N der Projektionen mit N_B . Der Wert von N_B nimmt mit wachsendem k_M langsamer zu als N_M . Es gibt also eine obere Schranke für k_M , oberhalb derer das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar ist.

Aus den linearen Näherungsgleichungen, welche die Momente des Bildes der zweiten Maschine mit den Momenten des lageveränderten Objektes verknüpfen, und der Transformationsgleichung für die Momente (Satz 5.3.1) ergibt sich ein überbestimmtes nichtlineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Lageveränderung. Dieses lässt sich iterativ lösen.

Im Folgenden werden aus der Betrachtung spezieller Linearkombinationen von Bildmomenten mit den Ordnungen k_u, k_v zusätzliche Gleichungen gewonnen, welche die Genauigkeit der Näherung mit der Ordnung $k_P + 1$ haben, obwohl in ihnen als Unbekannte nur Momente bis zur Ordnung $k_M(k_P, k_u, k_v)$ auftreten.

Wenn die Basisfächer zweier Fächerscharen in derselben Ebene liegen und die Führungsgeraden parallel sind, lassen sich die Fächerscharen im Allgemeinen so parametrisieren, dass die die Fächerschar beschreibenden Größen $\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{f}$ und a für beide Fächerscharen gleich sind und $\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1 = \lambda \mathbf{r}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

Die Näherungen der Bildmomente $J_{\mathbf{q}_1, \mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{af}}[\bullet_1^{k_u} \bullet_2^{k_v}]$ und $J_{\mathbf{q}_2, \mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{af}}[\bullet_1^{k_u} \bullet_2^{k_v}]$ sind nach Gleichung (6.27)

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{\mathbf{q}_1, \mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{af}}[\bullet_1^{k_u} \bullet_2^{k_v}] &= \sum_{i=0}^{k_P} c_{1, k_u, i} \int_{\mathbb{R}^3} ((\mathbf{f} \times \mathbf{n}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_1))^i \cdot \\ &\quad \cdot ((\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_1))^{k_u} \cdot \\ &\quad \cdot ((\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_1))^{k_v} \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \end{aligned} \quad (6.28)$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{\mathbf{q}_2, \mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{af}}[\bullet_1^{k_u} \bullet_2^{k_v}] &= \sum_{i=0}^{k_P} c_{2, k_u, i} \int_{\mathbb{R}^3} ((\mathbf{f} \times \mathbf{n}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_1 - \lambda \mathbf{r}))^i \cdot \\ &\quad \cdot ((\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_1 - \lambda \mathbf{r}))^{k_u} \cdot \\ &\quad \cdot ((\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_1 - \lambda \mathbf{r}))^{k_v} \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Mit $0 = (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \circ \mathbf{r} = (\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \circ \mathbf{r}$ und dem binomischen Satz $(y + z)^i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} y^j z^{i-j}$, $y, z \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ lässt sich dies zu

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{\mathbf{q}_2, \mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{af}}[\bullet_1^{k_u} \bullet_2^{k_v}] &= \sum_{i=0}^{k_P} c_{2, k_u, i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \lambda^{i-j} \cdot \\ &\quad \cdot \int_{\mathbb{R}^3} ((\mathbf{f} \times \mathbf{n}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_1))^j ((\mathbf{f} \times \mathbf{n}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{r}))^{i-j} \cdot \\ &\quad \cdot ((\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_1))^{k_u} \cdot \\ &\quad \cdot ((\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_1))^{k_v} \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} \end{aligned} \quad (6.30)$$

umformen.

Die Momente der höchsten Ordnung $k_P + k_u + k_v$ werden in den Gleichungen (6.28) und (6.30) nur durch $\int_{\mathbb{R}^3} ((\mathbf{f} \times \mathbf{n}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_1))^{k_P} ((\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_1))^{k_u} ((\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_1))^{k_v}$ repräsentiert. Dieser Term kann durch Differenzbildung eliminiert werden. Durch die auf diese Weise erhaltenen Gleichungen ergeben sich auch für ein höheres k_P Gleichungssysteme mit eindeutiger Lösung. Das prinzipielle Problem der Beschränktheit von k_P und damit der Genauigkeit der Näherungen bleibt aber bestehen. Um diese Beschränkung zu umgehen, wird das Problem im Folgenden aus einem anderen Blickwinkel betrachtet.

Aus der Lösung des nach obiger Vorgehensweise erhaltenen Gleichungssystems ergeben sich lineare Gleichungen für die Bestimmung der Momente des Objektes aus den Momenten der Bilder, also Gleichungen der Form

$$M_{(H)i_1, \dots, i_N} \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j_1=1}^{N_u} \sum_{j_2=1}^{N_v} c_{i,j_1,j_2,i_1, \dots, i_N} J_{\mathbf{q}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, a_i \mathbf{f}_i} [\bullet_1^{j_1} \bullet_2^{j_2}], \quad (6.31)$$

$$i_1, \dots, i_N = 0, \dots, 3, c_{i,j_1,j_2,i_1, \dots, i_N} \in \mathbb{R},$$

wobei N_u und N_v die maximalen Ordnungen der verwendeten Momente des Bildes in Richtung von u beziehungsweise v sind. Entsprechend gilt auch für die zugehörigen Integralkerne

$$f_{(H)i_1, \dots, i_N} \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j_1=1}^{N_u} \sum_{j_2=1}^{N_v} c_{i,j_1,j_2,i_1, \dots, i_N} h_{\mathbf{q}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, a_i \mathbf{f}_i} [\bullet_1^{j_1} \bullet_2^{j_2}], \quad (6.32)$$

$$i_1, \dots, i_N = 0, \dots, 3, c_{i,j_1,j_2,i_1, \dots, i_N} \in \mathbb{R}.$$

Es werden also die Momentenfunktionen $f_{(H)i_1, \dots, i_N}$ durch Linearkombinationen von Objektwichtungsfunktionen $h_{\mathbf{q}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, a_i \mathbf{f}_i} [\bullet_1^{j_1} \bullet_2^{j_2}]$ der Momente der einzelnen Bilder genähert. Diese Näherung hängt von den verwendeten näherungsweisen Beziehungen ab. Welche dieser Beziehungen verwendet werden sollten, wurde durch ein heuristisches Herangehen gefunden. Eine bessere Näherung lässt sich durch die Anwendung der Quadratmittelapproximation erwarten.

6.2.2. Variante 2 - Näherung in den einzelnen Ebenen

Das Problem der Berechnung der Momente $M_{(H)i_1, \dots, i_N}$, $i_1, \dots, i_N = 0, \dots, 3$ durch die Momente der N Bilder $J_{\mathbf{q}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, a_i \mathbf{f}_i} [w_i]$ kann auf die Berechnung der Momentenfunktionen $f_{(H)i_1, \dots, i_N}$, $i_1, \dots, i_N = 0, \dots, 3$ durch die Objektwichtungsfunktionen $h_{\mathbf{q}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, a_i \mathbf{f}_i} [w_i]$ zurückgeführt werden. Eine möglichst genaue Berechnungsvorschrift lässt sich durch die Lösung des Quadratmittelpblems (QMP)

$$\int_{\mathcal{K}} \left(f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^N h_{\mathbf{q}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, a_i \mathbf{f}_i} [w_i](\mathbf{x}) \right)^2 d^3 \mathbf{x} \rightarrow \min_{w_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})} \quad (6.33)$$

ermitteln. Dabei steht f ganz allgemein für die Momentenfunktion des jeweiligen zu nähernden Moments. \mathcal{K} ist der Bereich des Raumes, in welchem sich Objekte befinden können. Zur Verkürzung der Schreibweise werden die einzelnen Projektionen zusammengefasst, indem

$$w := \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

und

$$h[w] := \sum_{i=1}^N h_{\mathbf{q}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, a_i \mathbf{f}_i} [w_i] \quad (6.35)$$

eingeführt werden. Das QMP lautet somit

$$\int_{\mathcal{K}} (f(\mathbf{x}) - h[w](\mathbf{x}))^2 d^3 \mathbf{x} \rightarrow \min_{w \in (\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))^N}. \quad (6.36)$$

Um dieses Problem numerisch zu lösen, wird es diskretisiert, indem man w als Linearkombination von endlich vielen Basisfunktionen ϕ_j , $j = 1, \dots, D$ ansetzt. Dabei ist D die Anzahl der Basisfunktionen. Es gilt also

$$w = \sum_{j=1}^D c_j \phi_j \quad (6.37)$$

mit $c_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, \dots, D$. Daraus ergibt sich

$$h[w] = h\left[\sum_{j=1}^D c_j \phi_j\right] = \sum_{j=1}^D c_j \underbrace{h[\phi_j]}_{=: h_j}, \quad (6.38)$$

da $h[w]$ bezüglich w linear ist. Durch Einsetzen in Gleichung (6.36) ergibt sich das diskretisierte QMP

$$F(\mathbf{c}) := \int_{\mathcal{K}} \left(f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^D c_j h_j(\mathbf{x}) \right)^2 d^3\mathbf{x} \rightarrow \min_{\mathbf{c} := (c_1, \dots, c_D)^T \in \mathbb{R}^D}. \quad (6.39)$$

Für die Lösung dieses QMPs gilt $\nabla F(\mathbf{c}) = 0$. Sie berechnet sich aus dem linearen Gleichungssystem

$$\int_{\mathcal{K}} h_i(\mathbf{x}) h_j(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} c_j = \int_{\mathcal{K}} h_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}, \quad j = 1, \dots, D. \quad (6.40)$$

Die Werte der in diesem Gleichungssystem vorkommenden Integrale lassen sich numerisch bestimmen. Wenn für die Basisfunktionen die Momentenfunktionen des Bildes gewählt werden, erhält man ein Gleichungssystem mit wenigen Unbekannten, welches sich leicht lösen lässt. Bereits damit wird eine bessere Näherung als in Variante 1 erzielt.

Die bestmögliche Näherung ergibt sich hingegen, wenn jedem Bildelement (Pixel) eine eigene Basisfunktion ϕ_j zugeordnet wird. Damit entfällt die bisherige Einschränkung an die Auswahl der verwendeten integralen Größen des Bildes.

Die Umsetzung dieses allgemeinen Ansatzes ist allerdings mit Problemen behaftet. Ein typisches Bild enthält $1000 \times 700 = 7 \cdot 10^5$ Pixel. Bei fünf Bildern sind das insgesamt $3,5 \cdot 10^6$ Pixel. Man erhält also ein Gleichungssystem mit $3,5 \cdot 10^6$ Unbekannten. Die Matrix dieses Gleichungssystems enthält $(3,5 \cdot 10^6)^2 \approx 1,225 \cdot 10^{13}$ Einträge. Dies entspricht einem Speicherbedarf von $4,9 \cdot 10^{13}$ Byte = 49 Terabyte². Ein Speicher dieser Größe steht auf heutigen Rechnersystemen normalerweise nicht zur Verfügung.

Im Folgenden wird für einen häufig auftretenden Fall untersucht, inwieweit sich der Umfang des numerischen Problems reduzieren lässt. Dabei wird angenommen, dass die Basisfächer der verschiedenen Fächerscharen alle in einer Ebene, der Basisebene E_B , liegen. Dabei wird der Wert der Näherung $h[w]$ auf dieser Ebene nur durch die Werte $w(u, 0)$ der Basislinien der Bilder bestimmt. Analog ergeben sich die Werte der Näherungen auf den zu E_B parallelen Ebenen durch die Werte auf den entsprechenden zur Basislinie parallelen Linien des Bildes. Es wird gezeigt, dass in diesem Fall das Näherungsproblem in Teilprobleme für die einzelnen Ebenen zerfällt. Dazu ist der folgende Hilfssatz nützlich.

²bei Verwendung von Fließkommazahlen mit einfacher Genauigkeit nach IEEE-754 (4 Byte)

Hilfssatz 6.2.1 *Es sei I ein reelles eindimensionales Intervall und $F \in \mathcal{L}(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Es gelte für alle $t \in I$*

$$\mathbf{x}(t) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} F(t, \mathbf{x}) \quad (6.41)$$

und

$$\mathbf{y} = \operatorname{argmin}_{\bar{\mathbf{y}} \in \mathcal{L}(I, \mathbb{R}^n)} \int_I F(t, \bar{\mathbf{y}}(t)) dt. \quad (6.42)$$

Dann gilt $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$ für alle $t \in I$.

Beweis: Für jede Funktion $\mathbf{z} \in \mathcal{L}(I, \mathbb{R}^n)$ gilt wegen Gleichung (6.41)

$$F(t, \mathbf{z}(t)) \geq F(t, \mathbf{x}(t)).$$

Daraus folgt

$$\int_I F(t, \mathbf{z}(t)) dt \geq \int_I F(t, \mathbf{x}(t)) dt$$

und damit die Aussage des Satzes. \square

Die Bildwichtungsfunktionen werden durch den Ansatz

$$w_D(u, v) = \sum_{j=1}^{D_E} c_j(v) \psi_{Ej}(u) \quad (6.43)$$

in u -Richtung diskretisiert. Dabei sind $\psi_{Ej}(u)$ die Basisfunktionen der Diskretisierung und $c_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind die zugehörigen von v abhängenden Koeffizienten. Zur Untersuchung der Auswirkung dieser Diskretisierung dient der folgende Satz.

Satz 6.2.2 *Gegeben seien N Fächerscharen beschrieben durch $\mathbf{q}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, a_i, \mathbf{f}_i, i = 1, \dots, N$, deren Basisfächer alle in einer Ebene liegen. Die Führungsgeraden dieser Fächerscharen seien parallel. Ferner sei*

$$h[w] := \sum_{i=1}^N h_{\mathbf{q}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, a_i, \mathbf{f}_i}[w_i] \quad (6.44)$$

mit $w \in (\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))^N$ und

$$w := \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}. \quad (6.45)$$

Es seien $h_{\mathbf{q}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, a_i, \mathbf{f}_i}[w_i]$ die in Satz 5.2.1 definierten Funktionen. Dann gilt für alle Funktionen $c, \psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$h[c(\bullet_2)\psi(\bullet_1)](\mathbf{x}) = c(\mathbf{l} \circ \mathbf{x} - o) h[\psi(\bullet_1)](\mathbf{x}) \quad (6.46)$$

mit

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_1}{\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{f}_1)}, \quad (6.47)$$

$$o = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_1}{\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{f}_1)} \circ \mathbf{q}_1. \quad (6.48)$$

Das heißt, unter der Voraussetzung komplanarer Basisfächer gilt: Falls die Werte auf den einzelnen Zeilen der Bilder sich nur um einen für alle gleichen Faktor unterscheiden, gilt dies ebenfalls für die Objektwichtungsfunktionen auf den zu den Bildzeilen gehörenden Ebenen.

Beweis von Satz 6.2.2: Dass die Fächer in einer Ebene liegen, ist gleichbedeutend damit, dass die Normalenvektoren aller Basisfächerebenen sowie die Abstände des Koordinatenursprungs zu den Basisfächerebenen gleich sind. Es gilt also

$$\frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i}{|\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i|} = \frac{\mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_j}{|\mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_j|} =: \bar{\mathbf{l}}, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (6.49)$$

und

$$\frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i}{|\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i|} \circ \mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_j}{|\mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_j|} \circ \mathbf{q}_j =: \bar{o}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (6.50)$$

Die Parallelität der Führungsgeraden kommt durch

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_j =: \mathbf{n}, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (6.51)$$

zum Ausdruck. Es gilt

$$\frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i}{\det(\mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{f}_i)} = \frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i}{\mathbf{n}_i \circ \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i} = \frac{\frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i}{|\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i|}}{\mathbf{n}_i \circ \frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i}{|\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i|}}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Mit Gleichung (6.49) und Gleichung (6.51) folgt

$$\frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i}{\det(\mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{f}_i)} = \frac{\bar{\mathbf{l}}}{\mathbf{n} \circ \bar{\mathbf{l}}}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.52)$$

Dies ist unabhängig von i , deshalb folgt

$$\frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i}{\det(\mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{f}_i)} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_1}{\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{f}_1)} = \mathbf{l}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.53)$$

Analog ist

$$\frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i}{\det(\mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{f}_i)} \circ \mathbf{q}_i = \frac{\frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i}{|\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i|} \circ \mathbf{q}_i}{\mathbf{n}_i \circ \frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i}{|\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i|}} = \frac{\bar{o}}{\mathbf{n} \circ \bar{\mathbf{l}}}, \quad i = 1, \dots, N$$

unabhängig von i und es gilt

$$\frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i}{\det(\mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{f}_i)} \circ \mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_1}{\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{f}_1)} \circ \mathbf{q}_1 = o, \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.54)$$

Um das nach Gleichung (5.44) zu $w_i(u, v)$, $i = 1, \dots, N$ gehörende $\bar{w}_i(u, v)$, $i = 1, \dots, N$ einfach ausdrücken zu können, wird

$$\bar{\psi}_i(u) := \psi_i(u) |\mathbf{r}_i + u \mathbf{a}_i \mathbf{f}_i|, \quad u \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, N$$

eingeführt. Dabei sind $\psi_i(u)$, $i = 1, \dots, N$ die Komponenten von ψ . Für $w_i(u, v) = c(v) \psi_i(u)$ gilt dann mit Gleichung (5.44) die Beziehung

$$\begin{aligned} \bar{w}_i(u, v) &= c(v) \psi_i(u) |\mathbf{r}_i + u \mathbf{a}_i \mathbf{f}_i| \\ &= c(v) \bar{\psi}_i(u), \quad u, v \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Für die in Satz 5.2.1 definierte Objektwichtungsfunktion

$$h_{\mathbf{q}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, a_i \mathbf{f}_i}[w_i] = \bar{w}_i \left(\frac{(\mathbf{n}_i \times \mathbf{r}_i) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_i)}{a_i (\mathbf{f}_i \times \mathbf{n}_i) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_i)}, \frac{(\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_i)}{\det(\mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{f}_i)} \right) \cdot \frac{1}{|a_i| (\mathbf{f}_i \times \mathbf{n}_i) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_i)}.$$

ergibt sich mit den Gleichungen (6.53), (6.54) und (6.55)

$$\begin{aligned} h_{\mathbf{q}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, a_i \mathbf{f}_i}[w_i](\mathbf{x}) &= c(\mathbf{l} \circ \mathbf{x} - o) \bar{\psi}_i \left(\frac{(\mathbf{n}_i \times \mathbf{r}_i) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_i)}{a_i (\mathbf{f}_i \times \mathbf{n}_i) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_i)} \right) \frac{1}{|a_i| (\mathbf{f}_i \times \mathbf{n}_i) \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}_i)} \\ &= c(\mathbf{l} \circ \mathbf{x} - o) h_{\mathbf{q}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, a_i \mathbf{f}_i}[\psi_i(\bullet_1)](\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (6.56)$$

für $i = 1, \dots, N$. Daraus folgt mit Gleichung (6.44) die Behauptung

$$h[c(\bullet_2)\psi(\bullet_1)](\mathbf{x}) = c(\mathbf{l} \circ \mathbf{x} - o) h[\psi(\bullet_1)](\mathbf{x}). \quad (6.57)$$

□

Bemerkung 1: Aus Gleichung (6.52) folgt

$$\mathbf{l} \circ \mathbf{n} = 1. \quad (6.58)$$

Bemerkung 2: Für den Fall, dass die Fächer nicht in einer Ebene liegen, gilt der Satz noch für jeden der Fächer einzeln, also

$$h_{\mathbf{q}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, a_i \mathbf{f}_i}[c(\bullet_2)\psi(\bullet_1)](\mathbf{x}) = c(\mathbf{l}_i \circ \mathbf{x} - o_i) h[\psi(\bullet_1)](\mathbf{x}) \quad (6.59)$$

mit

$$\mathbf{l}_i = \frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i}{\det(\mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{f}_i)}, \quad (6.60)$$

$$o_i = \frac{\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i}{\det(\mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, \mathbf{f}_i)} \circ \mathbf{q}_i. \quad (6.61)$$

Mit dem Satz 6.2.2 ergibt sich für die Diskretisierung (6.43)

$$\begin{aligned} h[w_D](\mathbf{x}) &= h \left[\sum_{j=1}^{D_E} c_j(\bullet_2) \psi_{Ej}(\bullet_1) \right](\mathbf{x}) \\ &= \sum_{j=1}^{D_E} c_j(\mathbf{l} \circ \mathbf{x} - o) \underbrace{h[\psi_{Ej}(\bullet_1)](\mathbf{x})}_{h_{Ej}}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Der Objektbereich \mathcal{K} , über den im Quadratmittelpunktproblem (6.39) für die Ermittlung des Näherungsfehlers integriert wird, wird so festgelegt, dass die zur Basisebene E_B parallelen Ebenen alle möglichst gleich behandelt werden können. Es sei \mathcal{A} eine beschränkte abgeschlossene Teilmenge der Ebene E_B . Minimiert wird jetzt über einen durch Parallelverschiebung von \mathcal{A} entlang der Führungsgeraden entstehenden Objektbereich $\mathcal{K} = \{\mathbf{x} + \lambda \mathbf{n} | \mathbf{x} \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathcal{I}\}$, wobei \mathcal{I} ein abgeschlossenes eindimensionales Intervall ist. Die zu \mathcal{A} parallelen, ebenen Flächen sind

$\mathcal{A}(\lambda) := \{x \in \mathcal{K} | \mathbf{l} \circ \mathbf{x} - o = \lambda\}$. Es gilt wegen der Gleichungen (6.47) und (6.48) $\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}$. Das in den Bildzeilen diskretisierte Quadratmittelproblem ist

$$\int_{\mathcal{K}} (f(\mathbf{x}) - h[w_D](\mathbf{x}))^2 d^3\mathbf{x} \rightarrow \min_{w_D \in \mathcal{W}_D}, \quad (6.63)$$

wobei $\mathcal{W}_D := \left\{ w \in (\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))^N \mid w(u, v) = \sum_{j=1}^{D_E} c_j(v) \phi_j(u); c_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}$ der sich aus der Diskretisierung (6.43) ergebende Ansatzraum ist. Die Lösung des Quadratmittelproblems (6.63) ist definiert als

$$w_{Dopt} := \operatorname{argmin}_{w_D \in \mathcal{W}_D} \int_{\mathcal{K}} (f(\mathbf{x}) - h[w_D](\mathbf{x}))^2 d^3\mathbf{x}. \quad (6.64)$$

Mit Gleichung (6.62) folgt daraus

$$\mathbf{c}_{opt} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{c} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{D_E})} \int_{\mathcal{K}} \left(f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{D_E} c_j(\mathbf{l} \circ \mathbf{x} - o) h_{Ej}(\mathbf{x}) \right)^2 d^3\mathbf{x} \quad (6.65)$$

mit $\mathbf{c}^T := (c_1, \dots, c_{D_E})^T$. Durch Umformung ergibt sich

$$\mathbf{c}_{opt} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{c} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{D_E})} \int_{\mathcal{I}} \int_{\mathcal{A}(\lambda)} \left(f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{D_E} c_j(\lambda) h_{Ej}(\mathbf{x}) \right)^2 d\mathbf{A} d\lambda, \quad (6.66)$$

dabei ist $d\mathbf{A}$ das Flächenelement in den zu E_B parallelen Ebenen. Mit dem Hilfssatz 6.2.1 folgt, dass die Lösung dieses QMPs gefunden werden kann, indem die Lösungen des folgenden QMPs für alle $\lambda \in \mathcal{I}$ bestimmt werden:

$$\mathbf{c}_{opt}(\lambda) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{c}(\lambda) \in \mathbb{R}^{D_E}} \int_{\mathcal{A}(\lambda)} \left(f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{D_E} c_j(\lambda) h_{Ej}(\mathbf{x}) \right)^2 d\mathbf{A}. \quad (6.67)$$

Das Quadratmittelproblem wurde damit in eine Vielzahl von Quadratmittelproblemen für die einzelnen Ebenen zerlegt. Im Folgenden wird nun die spezielle Form der Momentenfunktionen ausgenutzt, um die Näherung in den einzelnen Ebenen auf die Näherung in der Basisebene zurückzuführen. Die Momentenfunktionen werden mit $f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, N_M$ bezeichnet, wobei N_M die Anzahl der Momentenfunktionen angibt. Wie in Kapitel 5 gezeigt, lassen sich die verschobenen Momentenfunktionen aus den Momentenfunktionen in der Ausgangslage mittels Linearkombinationen berechnen. Es gilt demnach

$$f_i(\mathbf{x} + s\mathbf{n}) = \sum_{j=1}^{N_M} b_{ij}(s) f_j(\mathbf{x}) \quad i = 1, \dots, N_M. \quad (6.68)$$

Die Koeffizienten b_{ij} , $i, j = 1, \dots, N_M$ sind mit Hilfe der Gleichung (5.105) zu bestimmen.

Mit der Substitution $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \frac{\lambda}{\mathbf{n} \circ \mathbf{l}} \mathbf{n}$ lässt sich die Gleichung (6.67) zu

$$\mathbf{c}_{opt}(\lambda) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{c}(\lambda) \in \mathbb{R}^{D_E}} \int_{\mathcal{A}} \left(f(\mathbf{y} + \lambda \mathbf{n}) - \sum_{j=1}^{D_E} c_j(\lambda) h_{Ej}(\mathbf{y} + \lambda \mathbf{n}) \right)^2 d\mathbf{A} \quad (6.69)$$

umformen. Die verwendete Substitution ordnet jedem \mathbf{x} aus $\mathcal{A}(\lambda)$ einen entsprechenden Punkt aus \mathcal{A} zu. Mit $\mathbf{n} \circ \mathbf{l} = 1$ folgt $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \lambda \mathbf{n}$.

Die Werte der Funktionen $h_{Ej}(\mathbf{x})$ am Punkt \mathbf{x} hängen per Definition (in Gleichung 6.62) nicht von der Fächerebene ab, zu welcher \mathbf{x} gehört. Es gilt also

$$h_{Ej}(\mathbf{y} + s\mathbf{n}) = h_{Ej}(\mathbf{y}), \quad j = 1, \dots, D_E, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, s \in \mathbb{R}. \quad (6.70)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (6.68) und (6.70) in Gleichung (6.69) ergibt sich

$$\mathbf{c}_{opt}(\lambda) = \underset{\mathbf{c}(\lambda) \in \mathbb{R}^{D_E}}{\operatorname{argmin}} \int_{\mathcal{A}} \left(\sum_{i=1}^{N_M} b_i(\lambda) f_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{D_E} c_j(\lambda) h_{Ej}(\mathbf{y}) \right)^2 d\mathbf{A}. \quad (6.71)$$

Wegen der Linearität der Lösung eines Quadratmittelpblems bezüglich der zu nähernden Funktion gilt

$$\mathbf{c}_{opt}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N_M} b_i(\lambda) \underset{\mathbf{c}(\lambda) \in \mathbb{R}^{D_E}}{\operatorname{argmin}} \int_{\mathcal{A}} \left(f_i(\mathbf{y}) - \sum_{j=1}^{D_E} c_j(\lambda) h_{Ej}(\mathbf{y}) \right)^2 d\mathbf{A}. \quad (6.72)$$

Der letzte Faktor ist die Quadratmittelnäherung der Funktion f_i im Teilbereich \mathcal{A} der Basisebene und ist unabhängig von λ . Damit ist die Lösung der Quadratmittelpunkte in den einzelnen Ebenen auf die Lösung der Quadratmittelpunkte in der Basisebene zurückgeführt. Das zu lösende Gleichungssystem hat in dem bereits beschriebenen Beispiel noch $5 \cdot 1000 = 5000$ Unbekannte. Die zugehörige Matrix hat $5000^2 = 25 \cdot 10^6$ Einträge, was nur noch einem Speicherbedarf von 100 Megabyte gegenüber ursprünglich 49 Terrabyte entspricht. Es ist also gelungen, den Rechenaufwand für den Fall komplanarer Basisfächer drastisch zu reduzieren. Im nächsten Abschnitt wird untersucht, ob die Reduzierung des Rechenaufwands auch ohne die Einschränkung auf komplanare Basisfächer möglich ist.

6.2.3. Variante 3 - Ausnutzung der Translationsinvarianz

Die Aufnahmegeometrie ist bezüglich Verschiebungen entlang der Führungsgeraden invariant. Die zu nähernden Momentenfunktionen haben die Eigenschaft, dass sich verschobene Momentenfunktionen als Linearkombination aus den nichtverschobenen Momentenfunktionen darstellen lassen. Beides wird ausgenutzt, um den Aufwand für die Lösung des Problems der Näherung der Momentenfunktionen durch die den Bildmomentenfunktionen w_i zugeordneten Objektwichtungsfunktionen $h_{\mathbf{q}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{r}_i, a_i \mathbf{f}_i}[w_i]$ ohne Vorbedingungen an die Aufnahmegeometrie zu reduzieren. Hierzu wird gezeigt, dass sich die Translationseigenschaften der zu nähernden Momente auf die Näherung übertragen. Damit wird die Anzahl der Variablen, vergleichbar zu Abschnitt 6.2.2, um Größenordnungen reduziert. Die Translationsinvarianz der Aufnahmegeometrie in Richtung der Führungsgeraden lässt erwarten, dass eine Verschiebung der zu nähernden Funktion in dieser Richtung zu der gleichen Verschiebung der Näherung führt. Deshalb sollte für in Führungsgeradenrichtung konstante Funktionen die Näherung in dieser Richtung ebenfalls konstant sein. (Abbildung 6.6)

Die Zuordnung, die jeder Momentenfunktion ihre Näherung zuweist, ist ein linearer Operator L . Das heißt, die Näherung zur Summe zweier Funktionen entspricht der Summe der Näherungen dieser beiden Funktionen (Superposition). Die Differenz einer in Führungsgeradenrichtung linearen Funktion und der gleichen in Führungsgeradenrichtung verschobenen Funktion ist eine in Führungsgeradenrichtung konstante Funktion. Wegen der Linearität des Operators L muss auch die Differenz zwischen den Näherungen der verschobenen und der nichtverschobenen linearen Funktion eine in Führungsgeradenrichtung konstante Funktion sein. Daraus folgt, dass die

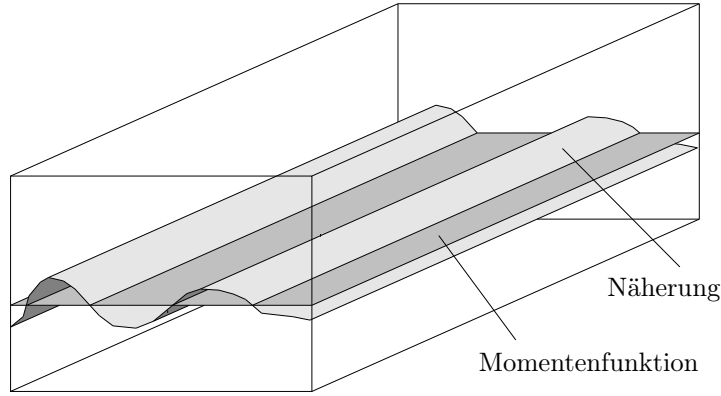


Abbildung 6.6.: Schematische Darstellung einer in Führungsgeradenrichtung konstanten Momentenfunktion und ihrer Näherung

Näherung einer in Führungsgeradenrichtung linearen Funktion ebenfalls eine in Führungsgeradenrichtung lineare Funktion ist (Abbildung 6.7). Analoge Aussagen gelten für in Führungsgeradenrichtung quadratische und kubische Funktionen. Diese Eigenschaften der Lösungen werden verwendet, um den Umfang des Näherungsproblems um Größenordnungen zu reduzieren. Die Anzahl der Variablen des Näherungsproblems entspricht ohne die Verwendung der Translations-eigenschaften der Anzahl der Pixel der Projektionsbilder, mit Verwendung der Translations-eigenschaften nur noch der Anzahl der Pixelspalten (Pixelanzahl in u -Richtung) der Projektionsbilder. Mit dieser Argumentation ist folgende Schwierigkeit verbunden: Damit das QMP in

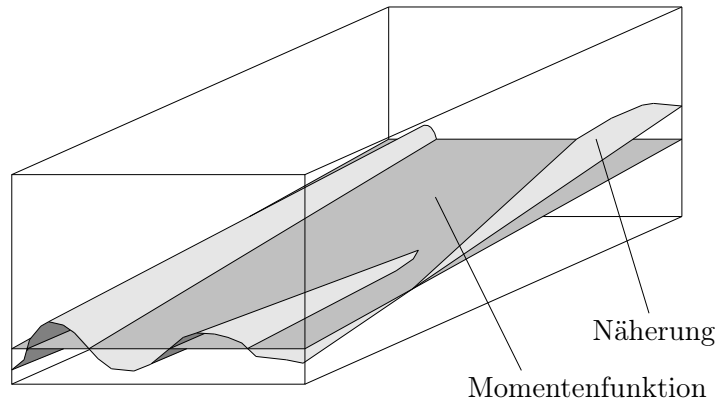


Abbildung 6.7.: Schematische Darstellung einer in Führungsgeradenrichtung linearen Momentenfunktion und ihrer Näherung

Führungsgeradenrichtung translationsinvariant ist, muss es auf einem in Führungsgeradenrichtung translationsinvarianten Objektbereich \mathcal{K} definiert werden, also gilt

$$\int_{\mathcal{K}} (f(\mathbf{x}) - h[w](\mathbf{x}))^2 d^3\mathbf{x} \rightarrow \min_{w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})} . \quad (6.73)$$

Ein translationsinvarianter Bereich ist aber in Führungsgeradenrichtung nicht beschränkt. Entsprechend muss für die Bestimmung des Näherungsfehlers über einen nicht beschränkten Bereich integriert werden. Deshalb ergeben sich für konstante, lineare oder quadratische Funktionen gewöhnlich unendliche Näherungsfehler. Insbesondere ist das Integral über die Differenz zwischen

einer konstanten Funktion und ihrer ebenfalls konstanten, nicht mit ihr identischen Näherung unendlich. Das Quadratmittelproblem ist daher für den vorliegenden Fall nicht praktikabel definiert.

Um diese Schwierigkeit zu lösen, wird ein verallgemeinertes Quadratmittelproblem eingeführt. Zur Konzeption dieses Quadratmittelproblems werden zunächst einige allgemeine Eigenschaften von Minimierungsproblemen und damit auch von Quadratmittelproblemen untersucht.

- Ein bleibt Optimum gleich, wenn durch das Optimum bereits erfüllte Zwangsbedingungen hinzugefügt werden. Es lassen sich so viele Zwangsbedingungen hinzufügen, dass nur noch ein Freiheitsgrad verbleibt.
- Ein Optimum ändert sich nicht, wenn zur Zielfunktion des Minimierungsproblems eine Konstante addiert wird. Wenn das Minimierungsproblem auf einen Freiheitsgrad reduziert wird, kann die Integration des Näherungsfehlers über alle Bereiche, die nicht von diesem Freiheitsgrad beeinflusst werden, entfallen.

Definition 6.2.1 *Es seien $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} \subseteq \{1, \dots, N\} \otimes \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^m$. Es seien $f \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathbb{R})$ und $h : \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathbb{R})$ ein linearer Operator. Eine Funktion $w \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{R})$ heißt Lösung des verallgemeinerten Quadratmittelproblems $f \cong h[w]$ genau dann, wenn für alle stetigen Funktionen $\bar{w} \in \mathcal{C}_C(\mathcal{E}, \mathbb{R})$ mit kompaktem Träger*

$$\operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}} \int_{\operatorname{Supp}(h[\bar{w}])} (f(\mathbf{x}) - h[w + \alpha \bar{w}])^2 d^n \mathbf{x} = 0 \quad (6.74)$$

gilt.

Das bedeutet: Eine Funktion ist die Lösung des verallgemeinerten QMPs, wenn bei Änderung der Funktion innerhalb eines endlichen Bereiches das Integral des Näherungsfehlers über die Stellen, an denen sich diese Änderung auswirkt, zunimmt. Die Lösung des verallgemeinerten Quadratmittelproblems zu einer Funktion f wird im Folgenden mit $L[f]$ bezeichnet.

Mit den Translationsoperatoren im Objekt- beziehungsweise Bildraum

$$(\tau_a f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} - a\mathbf{n}), \quad a \in \mathbb{R} \quad (6.75)$$

$$(\bar{\tau}_a w)(u, v) := w(u, v - a), \quad a \in \mathbb{R} \quad (6.76)$$

ergibt sich aus Gleichung (5.84)

$$h[\bar{\tau}_a w] = \tau_a h[w], \quad a \in \mathbb{R}. \quad (6.77)$$

Für eine Lösung $w = L[\tau_a f]$ des verallgemeinerten Quadratmittelproblems zur um a verschobenen Funktion f gilt laut Definition 6.2.1

$$\operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}} \int_{\operatorname{Supp}(h[\bar{w}])} ((\tau_a f)(\mathbf{x}) - h[w + \alpha \bar{w}])^2 d^n \mathbf{x} = 0, \quad \bar{w} \in \mathcal{C}_C(\mathcal{E}, \mathbb{R}). \quad (6.78)$$

Daraus folgt

$$\operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}} \int_{\operatorname{Supp}(\tau_{-a} h[\bar{w}])} (f(\mathbf{x}) - (\tau_{-a} h[w + \alpha \bar{w}])(\mathbf{x}))^2 d^n \mathbf{x} = 0, \quad \bar{w} \in \mathcal{C}_C(\mathcal{E}, \mathbb{R}).$$

Mit Gleichung (6.77) ergibt sich

$$\operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}} \int_{\operatorname{Supp}(h[\bar{\tau}_{-a} \bar{w}])} (f(\mathbf{x}) - h[\bar{\tau}_{-a} w + \alpha \bar{\tau}_{-a} \bar{w}](\mathbf{x}))^2 d^n \mathbf{x} = 0, \quad \bar{w} \in \mathcal{C}_C(\mathcal{E}, \mathbb{R}).$$

Da der Funktionenraum $\mathcal{C}_C(\mathcal{E}, \mathbb{R})$ translationsinvariant ist, folgt daraus

$$\operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}} \int_{\operatorname{Supp}(h[\bar{w}])} (f(\mathbf{x}) - h[\bar{\tau}_{-a}w + \alpha \bar{w}](\mathbf{x}))^2 d^n \mathbf{x} = 0, \quad \bar{w} \in \mathcal{C}_C(\mathcal{E}, \mathbb{R}).$$

Mit $w^* := \bar{\tau}_{-a}w$ ergibt sich schließlich

$$\operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}} \int_{\operatorname{Supp}(h[\bar{w}])} (f(\mathbf{x}) - h[w^* + \alpha \bar{w}](\mathbf{x}))^2 d^n \mathbf{x} = 0, \quad \bar{w} \in \mathcal{C}_C(\mathcal{E}, \mathbb{R}). \quad (6.79)$$

Daraus folgt nach Definition, dass w^* eine Lösung des verallgemeinerten Quadratmittelproblems zur Funktion f ist. Für den Fall, dass die Lösung eindeutig ist, gilt also

$$L[f] = w^* = \bar{\tau}_{-a}w = \bar{\tau}_{-a}L[\tau_a f]. \quad (6.80)$$

Die Lösung ist nur eindeutig, falls $h[w] \equiv 0 \Leftrightarrow w \equiv 0$ gilt. Aus Gleichung (6.80) folgt

$$L[\tau_a f] = \bar{\tau}_a L[f]. \quad (6.81)$$

Das bedeutet, dass sich die Lösung des verallgemeinerten Quadratmittelproblems genauso verschiebt wie die zu nähernde Funktion.

Für die translationsinvariante Funktion $f_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ gilt

$$f_0 = \tau_a f_0. \quad (6.82)$$

Mit der Linearität von L ergibt sich

$$L[f_0] = L[\tau_a f_0] = \bar{\tau}_a L[f_0]. \quad (6.83)$$

Somit ist die Näherung einer in Führungsgeradenrichtung translationsinvarianten Funktion ebenfalls translationsinvariant.

Aus Gleichung (6.83) folgt mit Gleichung (6.76)

$$L[f_0](u, -a) = L[f_0](u, 0). \quad (6.84)$$

Die vollständige Lösung wird somit durch die Lösung auf einer Bildzeile festgelegt. Damit lässt sich die Variablenanzahl des zugehörigen diskretisierten Quadratmittelproblems wesentlich reduzieren.

Anschließend an die Betrachtung in Führungsgeradenrichtung konstanter Funktionen werden nun die Funktionen

$$f_k(\mathbf{x}) := f_E(\underbrace{\mathbf{x} - (\mathbf{x} \circ \mathbf{n})\mathbf{n}}_{=: \mathbf{x}_E}) \underbrace{(\mathbf{x} \circ \mathbf{n})^k}_{=: \eta}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, k \in \mathbb{N} \quad (6.85)$$

k -ter Ordnung in Führungsgeradenrichtung untersucht. Dabei ist $f_E \in \mathcal{L}(E_0, \mathbb{R})$ eine in der Ebene $E_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{x} \circ \mathbf{n} = 0\}$ definierte Funktion. Aus Gleichung (6.85) folgt

$$f_k(\mathbf{x}_E + \eta \mathbf{n}) = f_E(\mathbf{x}_E) \eta^k, \quad \mathbf{x}_E \in E_0, \eta \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}. \quad (6.86)$$

Durch die aufeinanderfolgende Anwendung der Gleichungen (6.85), (6.75) und (6.86) erhält man

$$\begin{aligned} \tau_a f_k(\mathbf{x}) &= \tau_a f_k(\mathbf{x}_E + \eta \mathbf{n}) \\ &= f_k(\mathbf{x}_E + (\eta - a)\mathbf{n}) \\ &= f_E(\mathbf{x}_E)(\eta - a)^k. \end{aligned}$$

Mit dem binomischen Satz ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}\tau_a f_k(\mathbf{x}) &= f_E(\mathbf{x}_E) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \eta^j (-a)^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-a)^{k-j} f_j(\mathbf{x}).\end{aligned}\tag{6.87}$$

Daraus folgt mit der Linearität von L :

$$L[\tau_a f_k] = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-a)^{k-j} L[f_j].$$

Durch Umformen der linken Seite mittels Gleichung (6.81) ergibt sich

$$\bar{\tau}_a L[f_k] = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-a)^{k-j} L[f_j],\tag{6.88}$$

und mit der Definition (6.76) von $\bar{\tau}$

$$L[f_k](u, -a) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-a)^{k-j} L[f_j](u, 0).\tag{6.89}$$

Durch die Lösung des Näherungsproblems für eine Bildzeile ist demzufolge die Lösung vollständig festgelegt. Damit ist auch für den hier betrachteten Fall nichtkomplanarer Basisfächer die gewünschte Reduktion der Variablenanzahl des Näherungsproblems erreicht.

Im Folgenden wird die genaue Form des Gleichungssystems, mittels dessen sich die Näherung bestimmen lässt, ermittelt.

Aus Gleichung (6.74) folgt

$$0 = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \int_{\text{Supp}(h[\bar{w}])} (f(\mathbf{x}) - h[w + \alpha \bar{w}])^2 d^3 \mathbf{x}, \quad \bar{w} \in \mathcal{C}_C(\mathcal{E}, \mathbb{R})$$

sowie mit der Linearität von h

$$\begin{aligned}0 &= \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \int_{\text{Supp}(h[\bar{w}])} (f(\mathbf{x}) - h[w](\mathbf{x}) - \alpha h[\bar{w}](\mathbf{x}))^2 d^3 \mathbf{x} \\ &= \int_{\text{Supp}(h[\bar{w}])} 2(f(\mathbf{x}) - h[w](\mathbf{x}) - \alpha h[\bar{w}](\mathbf{x}))(-h[\bar{w}](\mathbf{x})) d^3 \mathbf{x} \Big|_{\alpha=0}, \quad \bar{w} \in \mathcal{C}_C(\mathcal{E}, \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Es gilt demzufolge

$$0 = \int_{\text{Supp}(h[\bar{w}])} (f(\mathbf{x}) - h[w](\mathbf{x})) h[\bar{w}](\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}, \quad \bar{w} \in \mathcal{C}_C(\mathcal{E}, \mathbb{R}).\tag{6.90}$$

In dieser Gleichung lässt sich $\text{Supp}(h[\bar{w}])$ durch \mathcal{K} ersetzen, da der Integrand aufgrund des Faktors $h[\bar{w}](\mathbf{x})$ außerhalb von $\text{Supp}(h[\bar{w}])$ verschwindet, also

$$0 = \int_{\mathcal{K}} (f(\mathbf{x}) - h[w](\mathbf{x})) h[\bar{w}](\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}, \quad \bar{w} \in \mathcal{C}_C(\mathcal{E}, \mathbb{R}).\tag{6.91}$$

Die Lösung $w_k = L[f_k]$ nimmt nach Gleichung (6.89) die Form

$$w_k(u, v) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} v^{k-j} w_{(0)j}(u) \quad (6.92)$$

an. Durch Einsetzen von Gleichung (6.92) in Gleichung (6.91) ergibt sich

$$0 = \int_{\mathcal{K}} \left(f_k(\mathbf{x}) - h \left[\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \bullet_2^{k-j} w_{(0)j}(\bullet_1) \right] (\mathbf{x}) \right) h[\bar{w}](\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}, \quad \bar{w} \in \mathcal{C}_C(\mathcal{E}, \mathbb{R}). \quad (6.93)$$

Diese Gleichung drückt aus, dass die Fächerscharprojektion der Differenz zwischen Momentenfunktion und Näherung überall verschwindet.

Durch Umformen von Gleichung (6.93) ergeben sich die aufeinander aufbauenden Gleichungen

$$0 = \int_{\mathcal{K}} (\bar{f}_k(\mathbf{x}) - h[w_{(0)k}(\bullet_1)](\mathbf{x})) h[\bar{w}](\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}, \quad \bar{w} \in \mathcal{C}_C(\mathcal{E}, \mathbb{R}), k \in \mathbb{N} \quad (6.94)$$

zur Bestimmung von $w_{(0)k}$, wobei

$$\bar{f}_k(\mathbf{x}) := f_k(\mathbf{x}) - h \left[\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \bullet_2^{k-j} w_{(0)j}(\bullet_1) \right] (\mathbf{x}), \quad k \in \mathbb{N}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (6.95)$$

ist.

Für die Diskretisierung wird der Ansatz

$$w_{(0)k}(u) := \sum_{i=1}^{D_E} c_{ki} \phi_i(u), \quad c_{ki} \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{R} \quad (6.96)$$

gewählt. Daraus folgt wegen der Linearität von h

$$h[w_{(0)k}] := \sum_{i=1}^{D_E} c_{ki} \underbrace{h[\phi_i]}_{=: h_{Ei}} = \sum_{i=1}^{D_E} c_{ki} h_{Ei}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (6.97)$$

Die Basisfunktionen ϕ_i sollen jeweils nur auf einen Fächer wirken, $\Gamma(i)$ sei die Nummer des Fächers zur Basisfunktion ϕ_i . Da die Lösung bereits durch eine Bildzeile festgelegt wird, kann die Auswahl der Testfunktionen \bar{w} ebenfalls auf eine Zeile beschränkt werden. Die Diskretisierung lautet dann

$$\bar{w}_l(u, v) = \delta_0(v) \phi_l(u), \quad l = 1, \dots, D_E.$$

Daraus folgt

$$h[\bar{w}_l] = h[\delta_0(\bullet_2) \phi_l(\bullet_1)], \quad l = 1, \dots, D_E. \quad (6.98)$$

Mit Gleichung (6.59) ergibt sich

$$h[\bar{w}_l](\mathbf{x}) = \underbrace{h_{\mathbf{q}_{\Gamma(l)}, \mathbf{n}_{\Gamma(l)}, \mathbf{r}_{\Gamma(l)}, a_{\Gamma(l)}, \mathbf{f}_{\Gamma(l)}}}_{=: h[\phi_l] = h_{El}} [\phi_l(u)](\mathbf{x}) \delta_0(\mathbf{l}_{\Gamma(l)} \circ \mathbf{x} - o_{\Gamma(l)}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (6.99)$$

Das Einsetzen der Gleichungen (6.97) und (6.99) in Gleichung (6.94) ergibt

$$0 = \int_{\mathcal{K}} \left(\bar{f}_k(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{D_E} c_{ki} h_{Ei}(\mathbf{x}) \right) h_{El}(\mathbf{x}) \delta_0(\mathbf{l}_{\Gamma(l)} \circ \mathbf{x} - o_{\Gamma(l)}) d^3 \mathbf{x}, \quad l = 1, \dots, D_E. \quad (6.100)$$

Die Koeffizienten dieses Gleichungssystems können durch numerische Integration in einer Ebene berechnet werden. Die genauen Berechnungsvorschriften enthält der folgende Satz:

Satz 6.2.3 Es sei $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $\tau_a \mathcal{K} = \mathcal{K}$. Es seien $f_k \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$ Funktionen mit der Eigenschaft

$$\tau_a f_k(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-a)^{k-j} f_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (6.101)$$

Ferner seien

$$\mathcal{W}_D := \left\{ w \in (\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))^N \left| w(u, v) = \sum_{j=1}^{D_E} c_j(v) \phi_j(u); c_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right. \right\} \quad (6.102)$$

und $h^* : \mathcal{W}_D \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathbb{R})$ mit $h^*[w] := h[w]$ für $w \in \mathcal{W}_D$. Es gelte $h^*[w] \equiv 0 \Leftrightarrow w \equiv 0$. Dann ist die Funktion $w_k \in \mathcal{W}_D$ mit

$$w_k(u, v) = \sum_{j=0}^k \sum_{r=1}^{D_E} \binom{k}{j} v^{k-j} c_{jr} \phi_r(u), \quad u, v \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \quad (6.103)$$

eine Lösung des verallgemeinerten Quadratmittelproblems $f_k \cong h^*[w]$ genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^{D_E} c_{ki} E_{il} = F_{kl} - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \sum_{r=1}^{D_E} c_{jr} B_{k-j,r,l}, \quad l = 1, \dots, D_E, k \in \mathbb{N} \quad (6.104)$$

erfüllt ist. Dabei gelten mit $\mathcal{B} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{K} | \mathbf{x} \circ \mathbf{n} = 0\}$

$$E_{il} := \int_{\mathcal{B}} h_{Ei}(\mathbf{x}_E) h_{El}(\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E, \quad (6.105)$$

$$F_{kl} := \int_{\mathcal{B}} f_E(\mathbf{x}_E) (-(\mathbf{l}_{\Gamma(l)} \circ \mathbf{x}_E - o_{\Gamma(l)}))^k h_{El}(\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E \quad (6.106)$$

und

$$B_{m,r,l} = \int_{\mathcal{B}} h_{Er}(\mathbf{x}_E) ((\mathbf{l}_{\Gamma(r)} - \mathbf{l}_{\Gamma(l)}) \circ \mathbf{x}_E - (o_{\Gamma(r)} - o_{\Gamma(l)}))^m h_{El}(\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E \quad (6.107)$$

für $i, l, r = 1, \dots, D_E$ und $k, m \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Die mittels der Gleichung (6.103) definierte Funktion w ist, wie oben dargestellt, Lösung des verallgemeinerten Quadratmittelproblems $f \cong h^*[w]$, falls die Gleichung (6.100) erfüllt ist.

Für die Ortsvektoren \mathbf{x} wird die Darstellung

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_E + \eta \mathbf{n}, \quad \mathbf{x}_E \in E_0, \eta \in \mathbb{R} \quad (6.108)$$

gewählt. Dabei ist E_0 die Ebene senkrecht zur Führungsgerade, welche den Koordinatenursprung enthält, also $E_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{x} \circ \mathbf{n} = 0\}$. Setzt man die Gleichung (6.108) in (6.100) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{B}} \int_{\mathbb{R}} \left(\bar{f}_k(\mathbf{x}_E + \eta \mathbf{n}) - \sum_{i=1}^{D_E} c_{ki} h_{Ei}(\mathbf{x}_E + \eta \mathbf{n}) \right) \\ &\quad \cdot h_{El}(\mathbf{x}_E + \eta \mathbf{n}) \delta_0(\mathbf{l}_{\Gamma(l)} \circ (\mathbf{x}_E + \eta \mathbf{n}) - o_{\Gamma(l)}) d\eta d^2 \mathbf{x}_E, \quad l = 1, \dots, D_E, \end{aligned} \quad (6.109)$$

wobei $\mathcal{B} = \mathcal{K} \cap E_0$ verwendet wurde.

Die Funktion $h_{Ei} = h[\phi_i(\bullet_1)]$ ist wegen Gleichung (6.59) translationsinvariant. Folglich gilt

$$h_{Ei}(\mathbf{x}_E + \eta \mathbf{n}) = h_{Ei}(\mathbf{x}_E), \quad \mathbf{x}_E \in E_0, \eta \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, D_E. \quad (6.110)$$

Nach Gleichung (6.58) gilt $\mathbf{l}_{\Gamma(l)} \circ \mathbf{n} = 1$, womit

$$\delta_0(\mathbf{l}_{\Gamma(l)} \circ (\mathbf{x}_E + \eta \mathbf{n}) - o_{\Gamma(l)}) = \delta_0(\mathbf{l}_{\Gamma(l)} \circ \mathbf{x}_E - o_{\Gamma(l)} + \eta) \quad (6.111)$$

folgt. Dabei ist das Argument der Deltadistribution gleich Null für $\eta = \bar{\eta}(\mathbf{x}_E)$ mit

$$\bar{\eta}(\mathbf{x}_E) := -(\mathbf{l}_{\Gamma(l)} \circ \mathbf{x}_E - o_{\Gamma(l)}). \quad (6.112)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (6.110) bis (6.112) in Gleichung (6.109) ergibt sich

$$0 = \int_{\mathcal{B}} \left(\bar{f}_k(\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E) \mathbf{n}) - \sum_{i=1}^{D_E} c_{ki} h_{Ei}(\mathbf{x}_E) \right) h_{El}(\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E, \quad l = 1, \dots, D_E. \quad (6.113)$$

Die Gleichung (6.113) lässt sich zu

$$\sum_{i=1}^{D_E} c_{ki} \underbrace{\int_{\mathcal{B}} h_{Ei}(\mathbf{x}_E) h_{El}(\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E}_{=: E_{il}} = \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \bar{f}_k(\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E) \mathbf{n}) h_{El}(\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E}_{=: \bar{F}_{kl}}, \quad l = 1, \dots, D_E \quad (6.114)$$

umformen.³ Aus \bar{F}_{kl} wird mit Gleichung (6.95)

$$\begin{aligned} \bar{F}_{kl} &= \int_{\mathcal{B}} \left(f_k(\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E) \mathbf{n}) - h \left[\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \bullet_2^{k-j} w_{(0)j}(\bullet_1) \right] (\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E) \mathbf{n}) \right) h_{El}(\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{B}} f_k(\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E) \mathbf{n}) h_{El}(\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E}_{=: F_{kl}} \\ &\quad - \underbrace{\int_{\mathcal{B}} h \left[\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \bullet_2^{k-j} w_{(0)j}(\bullet_1) \right] (\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E) \mathbf{n}) h_{El}(\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E}_{=: G_{kl}}. \end{aligned} \quad (6.115)$$

Mit Gleichung (6.96) folgt

$$\begin{aligned} G_{kl} &= \int_{\mathcal{B}} h \left[\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \bullet_2^{k-j} \sum_{r=1}^{D_E} c_{jr} \phi_r(\bullet_1) \right] (\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E) \mathbf{n}) h_{El}(\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \sum_{r=1}^{D_E} c_{ji} \int_{\mathcal{B}} h \left[\bullet_2^{k-j} \phi_r(\bullet_1) \right] (\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E) \mathbf{n}) h_{El}(\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E. \end{aligned} \quad (6.116)$$

³Die Größen E_{il} , F_{kl} und $B_{m,r,l}$ werden im Verlauf dieses Beweises als neue Variablen eingeführt. Es wird gezeigt, dass diese Variablen die im Satz 6.2.3 angegebenen Werte annehmen.

Mit den Gleichungen (6.59) und (6.110) wird daraus

$$G_{kl} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \sum_{r=1}^{D_E} c_{ji} \underbrace{\int_{\mathcal{B}} h_{Er}(\mathbf{x}_E) (\mathbf{l}_{\Gamma(r)} \circ (\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E)\mathbf{n}) - o_{\Gamma(r)})^{k-j}(\mathbf{x}_E) h_{El}(\mathbf{x}_E) d^2\mathbf{x}_E}_{=: B_{k-j,r,l}}. \quad (6.117)$$

Mit Gleichung (6.58) und Gleichung (6.112) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{\Gamma(r)} \circ (\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E)\mathbf{n}) - o_{\Gamma(r)} &= \mathbf{l}_{\Gamma(r)} \circ \mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E) - o_{\Gamma(r)} \\ &= (\mathbf{l}_{\Gamma(r)} - \mathbf{l}_{\Gamma(l)}) \circ \mathbf{x}_E - (o_{\Gamma(r)} - o_{\Gamma(l)}). \end{aligned} \quad (6.118)$$

Daraus folgt

$$B_{m,r,l} = \int_{\mathcal{B}} h_{Er}(\mathbf{x}_E) ((\mathbf{l}_{\Gamma(r)} - \mathbf{l}_{\Gamma(l)}) \circ \mathbf{x}_E - (o_{\Gamma(r)} - o_{\Gamma(l)}))^m(\mathbf{x}_E) h_{El}(\mathbf{x}_E) d^2\mathbf{x}_E. \quad (6.119)$$

Mit Gleichung (6.86) ergibt sich

$$F_{kl} = \int_{\mathcal{B}} f_E(\mathbf{x}_E) (\bar{\eta}(\mathbf{x}_E))^k h_{El}(\mathbf{x}_E) d^2\mathbf{x}_E,$$

und mit Gleichung (6.112) folgt

$$F_{kl} = \int_{\mathcal{B}} f_E(\mathbf{x}_E) (- (\mathbf{l}_{\Gamma(l)} \circ \mathbf{x}_E - o_{\Gamma(l)}))^k h_{El}(\mathbf{x}_E) d^2\mathbf{x}_E.$$

Durch Einsetzen von $\bar{F}_{kl} = F_{kl} - G_{kl}$ (siehe Gleichung (6.115)) und Gleichung (6.116) in Gleichung (6.114) ergibt sich schließlich

$$\sum_{i=1}^{D_E} c_{ki} E_{il} = F_{kl} - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \sum_{r=1}^{D_E} c_{jr} B_{k-j,r,l}, \quad l = 1, \dots, D_E, k \in \mathbb{N}. \quad (6.120)$$

□

Unter der Voraussetzung, dass $h[w] \equiv 0 \Leftrightarrow w \equiv 0$ erfüllt ist, wurde ein lineares Gleichungssystem zur Ermittlung der Näherung der Momentenfunktionen durch den Bildwichtungsfunktionen zugeordnete Objektwichtungsfunktionen aufgestellt.

Fächerscharen mit identischen Führungsgeraden

Wie nachfolgend gezeigt wird, ist für den Fall, dass die Führungsgeraden zweier Projektionen zusammenfallen, die Bedingung $h^*[w] \equiv 0 \Leftrightarrow w \equiv 0$ für den Satz (6.2.3) nicht erfüllt. Dieser Fall tritt in der Praxis zum Beispiel dann auf, wenn dieselbe Röntgenquelle mit zwei verschiedenen Detektoren verwendet wird.

Für die Berechnung der Näherung für in Führungsgeradenrichtung konstante Momentenfunktionen wird ein Gleichungssystem aufgestellt. Anschließend wird für die in Führungsgeradenrichtung nicht konstanten Momentenfunktionen analog zum Fall nicht identischer Führungsgeraden die Form der Lösung des Näherungsproblems bestimmt. Diese Form wird genutzt, um ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Näherung aufzustellen.

Konstante Momentenfunktionen

Es seien für zwei Fächerscharen \mathbf{q} und \mathbf{n} gleich. Durch geeignete Umparametrisierung lässt sich $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{n} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{n}$ und $a_1 \mathbf{f}_1 \times \mathbf{n} = a_2 \mathbf{f}_2 \times \mathbf{n}$ erreichen. Dann gilt wegen Gleichung (6.59)

$$h_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r}_1,a_1\mathbf{f}_1}[\psi(\bullet_1)] = h_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r}_2,a_2\mathbf{f}_2}[\psi(\bullet_1)]. \quad (6.121)$$

Daraus folgt, dass für $w = (w_1, \dots, w_N)^T$ mit $w_1(u, v) = \psi(u)$ und $w_2(u, v) = -\psi(u)$ die Funktion $h[w]$ konstant Null ist und demzufolge die Lösung des verallgemeinerten Quadratmittelproblems nicht mehr eindeutig ist.

Aus Gleichungen (6.59) und (6.121) folgt

$$h_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, r_1, a_1 \mathbf{f}_1}[\bullet_2 \psi(\bullet_1)](\mathbf{x}) - h_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, r_2, a_2 \mathbf{f}_2}[\bullet_2 \psi(\bullet_1)](\mathbf{x}) = ((\mathbf{l}_1 \circ \mathbf{x} - o_1) - (\mathbf{l}_2 \circ \mathbf{x} - o_2)) h_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, r_1, a_1 \mathbf{f}_1}[\psi(\bullet_1)] . \quad (6.122)$$

Es handelt sich hierbei um eine in Führungsgeradenrichtung konstante Funktion, da

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_1 \circ \mathbf{x} - \mathbf{l}_2 \circ \mathbf{x} &= \mathbf{l}_1 \circ (\mathbf{x}_E + \eta \mathbf{n}) - \mathbf{l}_2 \circ (\mathbf{x}_E + \eta \mathbf{n}) \\ &= (\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2) \circ \mathbf{x}_E + \eta (\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2) \circ \mathbf{n} \\ &= (\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2) \circ \mathbf{x}_E , \end{aligned} \quad (6.123)$$

wobei im letzten Schritt $\mathbf{l}_1 \circ \mathbf{n} = \mathbf{l}_2 \circ \mathbf{n} = 1$ verwendet wurde.

Die Paare von Fächerscharen mit gleicher Führungsgerade seien auf dieselbe Art und Weise diskretisiert. Die dabei verwendete Basis ist $\{\phi_i, i \in I\}$ mit $I := \{1, \dots, D_E\}$. Die Indexmenge I wird in I_2 und $I_1 := I \setminus I_2$ zerlegt. Von jeweils zwei Fächerscharen mit gleicher Führungsgerade enthält I_2 die Indizes der Basisfunktionen zu einer der Fächerscharen.

Diskretisierung auf dieselbe Art und Weise ist gleichbedeutend damit, dass es für jedes $i \in I_2$ ein $i_1(i) \in I_1$ gibt, so dass $h[\phi_{i_1(i)}] + h[\phi_i] = 0$ gilt. Um eine einheitlichere Schreibweise zu erhalten, wird im Folgenden für $i \in I_2$ auch $i_2(i) := i$ geschrieben. Damit gilt

$$h[\phi_{i_1(i)}] + h[\phi_{i_2(i)}] = 0, \quad i \in I_2 . \quad (6.124)$$

Es wird die Basis $\{\bar{\phi}_i, i \in I\}$ mit

$$\bar{\phi}_i(u, v) = \begin{cases} \phi_i(u) & i \in I_1 \\ v(\phi_{i_1(i)}(u) - \phi_{i_2(i)}(u)) & i \in I_2 \end{cases} \quad (6.125)$$

eingeführt.

Es wird angenommen⁴, dass auch im hier betrachteten Fall zusammenfallender Führungsgeraden die Näherung einer in Führungsgeradenrichtung konstanten Funktion in Führungsgeradenrichtung konstant ist. Für konstante Funktionen ist es dann ausreichend, den Fehler in nur einer Ebene senkrecht zur Führungsgeradenrichtung zu betrachten, da er in den anderen Ebenen den gleichen Wert besitzt.

Die Bildwichtungsfunktion

$$\tilde{w} := \sum_{r=1}^{D_E} \bar{c}_{0r} \bar{\phi}_r, \quad \bar{c}_{0r} \in \mathbb{R} \quad (6.126)$$

zur Lösung des Quadratmittelproblems

$$\int_{\mathcal{B}} \left(f_0(\mathbf{x}_E) - \sum_{r=1}^{D_E} \bar{c}_{0r} h[\bar{\phi}_r](\mathbf{x}_E) \right)^2 d^2 \mathbf{x}_E \rightarrow \min_{(\bar{c}_{01}, \dots, \bar{c}_{0D_E}) \in \mathbb{R}^{D_E}} \quad (6.127)$$

⁴und später bewiesen

ist durch

$$\sum_{r=1}^{D_E} \bar{c}_{0r} \underbrace{\int_{\mathcal{B}} h[\bar{\phi}_r](\mathbf{x}_E) h[\bar{\phi}_l](\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E}_{\tilde{E}_{rl}} = \underbrace{\int_{\mathcal{B}} f_0(\mathbf{x}_E) h[\bar{\phi}_l](\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E}_{\tilde{F}_{0l}}, \quad l = 1, \dots, D_E \quad (6.128)$$

festgelegt. Aus den Gleichungen (6.124) und (6.125) folgt

$$h_{Ei_1(i)} = h_{Ei_2(i)}, \quad i \in I_2. \quad (6.129)$$

Aus den Gleichungen (6.122), (6.125) und (6.129) ergibt sich

$$h[\bar{\phi}_i](\mathbf{x}) = \begin{cases} h_{Ei}(\mathbf{x}) & i \in I_1 \\ ((\mathbf{l}_{\Gamma i_1(i)} - \mathbf{l}_{\Gamma i_2(i)}) \circ \mathbf{x}_E - (o_{\Gamma i_1(i)} - o_{\Gamma i_2(i)})) h_{Ei_1(i)}(\mathbf{x}) & i \in I_2 \end{cases}. \quad (6.130)$$

Daraus folgt für $r, l \in I_1$ mit Gleichung (6.105)

$$\tilde{E}_{rl} = E_{rl}, \quad r, l \in I_1. \quad (6.131)$$

Für $r \in I_1, l \in I_2$ folgt aus den Gleichungen (6.130) und (6.129)

$$\tilde{E}_{rl} = \int_{\mathcal{B}} h_{Er}(\mathbf{x}_E) h_{Ei_1(l)}(\mathbf{x}_E) ((\mathbf{l}_{\Gamma i_1(l)} - \mathbf{l}_{\Gamma i_2(l)}) \circ \mathbf{x}_E - (o_{\Gamma i_1(l)} - o_{\Gamma i_2(l)})) d^2 \mathbf{x}_E. \quad (6.132)$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{rl} = & \int_{\mathcal{B}} h_{Er}(\mathbf{x}_E) h_{Ei_1(l)}(\mathbf{x}_E) ((\mathbf{l}_{\Gamma i_1(l)} - \mathbf{l}_{\Gamma r}) \circ \mathbf{x}_E - (o_{\Gamma i_1(l)} - o_{\Gamma r})) d^2 \mathbf{x}_E + \\ & \int_{\mathcal{B}} h_{Er}(\mathbf{x}_E) h_{Ei_1(l)}(\mathbf{x}_E) ((\mathbf{l}_{\Gamma i_2(l)} - \mathbf{l}_{\Gamma r}) \circ \mathbf{x}_E - (o_{\Gamma i_2(l)} - o_{\Gamma r})) d^2 \mathbf{x}_E, \quad r \in I_2, l \in I_1. \end{aligned} \quad (6.133)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (6.107) in Gleichung (6.133) ergibt sich

$$\tilde{E}_{rl} = B_{1,i_1(l),r} - B_{1,i_2(l),r}, \quad r \in I_1, l \in I_2. \quad (6.134)$$

Analog gilt

$$\tilde{E}_{rl} = B_{1,i_1(r),l} - B_{1,i_2(r),l}, \quad r \in I_2, l \in I_1. \quad (6.135)$$

Für $r, l \in I_1$ lässt sich \tilde{E}_{rl} nicht auf bereits definierte Größen zurückführen. Durch Zusammenfassen der Beziehungen für \tilde{E}_{rl} ergibt sich

$$\tilde{E}_{rl} = \begin{cases} E_{rl} & r, l \in I_1 \\ B_{1,i_1(l),r} - B_{1,i_2(l),r} & r \in I_1, l \in I_2 \\ B_{1,i_1(r),l} - B_{1,i_2(r),l} & r \in I_2, l \in I_1 \\ D_{rl} & r, l \in I_2 \end{cases} \quad (6.136)$$

mit

$$\begin{aligned} D_{rl} := & \int_{\mathcal{B}} h_{Ei_1(r)}(\mathbf{x}_E) h_{Ei_1(l)}(\mathbf{x}_E) \cdot \\ & ((\mathbf{l}_{\Gamma i_1(r)} - \mathbf{l}_{\Gamma i_2(r)}) \circ \mathbf{x}_E - (o_{\Gamma i_1(r)} - o_{\Gamma i_2(r)})) \cdot \\ & ((\mathbf{l}_{\Gamma i_1(l)} - \mathbf{l}_{\Gamma i_2(l)}) \circ \mathbf{x}_E - (o_{\Gamma i_1(l)} - o_{\Gamma i_2(l)})) d^2 \mathbf{x}_E, \quad r, l \in I_2. \end{aligned} \quad (6.137)$$

Aus den Gleichungen (6.128) und (6.106) folgt

$$\tilde{F}_{0l} = \begin{cases} F_{0l} & r \in I, l \in I_1 \\ -F_{1i_1(l)} + \tilde{F}_{1i_2(l)} & r \in I, l \in I_2 \end{cases}. \quad (6.138)$$

Die Koeffizienten \tilde{E}_{rl} und \tilde{F}_{0l} lassen sich mittels der Gleichungen (6.136), (6.137) und (6.138) berechnen, so dass sich \bar{c}_{0r} und damit die Lösung aus Gleichung (6.128) bestimmen lässt.

Nicht konstante Momentenfunktionen

Die Form der Lösung des verallgemeinerten Quadratmittelproblems ergibt sich für den Fall nicht eindeutiger Lösungen aus folgender Betrachtung. Im Fall nicht eindeutiger Lösungen ist L ein linearer Operator, welcher einer Funktion die Lösungsmenge des verallgemeinerten Quadratmittelproblems zuordnet. Die Lösungsmenge $L[0]$ zur Nullfunktion werde wie folgt dargestellt:

$$L[0] = \{w^*[\alpha], \alpha \in \mathcal{P}\}. \quad (6.139)$$

Dabei stellt \mathcal{P} einen Parameterraum dar. Es gilt

$$h[w^*[\alpha]](u, v) = 0 \quad u, v \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathcal{P}. \quad (6.140)$$

Die Herleitung der Gleichung (6.88) für die Translationseigenschaften einer eindeutigen Lösung lässt sich analog auch für Lösungsmengen durchführen. Es ergibt sich

$$\bar{\tau}_a L[f_k] = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-a)^{k-j} L[f_j] + L[0], \quad k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}. \quad (6.141)$$

Der Unterschied zu Gleichung (6.88) besteht im Summanden $L[0]$, welcher die Uneindeutigkeit der Lösungen zum Ausdruck bringt. Aus Gleichung (6.141) folgt

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\bar{\tau}_{-a} L[f_k] - L[f_k]}{a} = k L[f_{k-1}], \quad k \in \mathbb{N}, \quad (6.142)$$

wobei $f_{-1}(\mathbf{x}) := 0$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gesetzt wurde. Diese Bedingung wird durch

$$L[f_k](u, v) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} v^{k-j} w_{(0)j}(u) + \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k v^{k+1-j} \binom{k+1}{j} w^*[\alpha_j](u) + L[0](u, v), \quad k \in \mathbb{N}, u, v \in \mathbb{R} \quad (6.143)$$

erfüllt, da

$$\begin{aligned} \partial_v L[f_k](u, v) &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} (k-j) v^{k-j-1} w_{(0)j}(u) + \\ &\quad + \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k (k+1-j) v^{k-j} \binom{k+1}{j} w^*[\alpha_j](u) + L[0](u, v) \\ &= k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} v^{k-j-1} w_{(0)j}(u) + \sum_{j=0}^k v^{k-j} \binom{k}{j} w^*[\alpha_j](u) + L[0](u, v) \end{aligned} \quad (6.144)$$

$$= k L[f_{k-1}](u, v), \quad k \in \mathbb{N} \quad (6.145)$$

gilt, wobei

$$\binom{k}{j} (k-j) = \frac{k!}{(k-j)!j!} (k-j) = k \frac{(k-1)!}{(k-j-1)!j!} = k \binom{k-1}{j} \quad (6.146)$$

beziehungsweise dieselbe Bedingung mit $k + 1$ statt k ausgenutzt wurde. Durch die Bedingung (6.142) wird $L[f_k](u, v)$ bis auf den translationsinvarianten Teil festgelegt. Für diesen wurde die Darstellung $w_{(0)k}(u) + vw^*[\alpha_k](u)$ mit $\alpha_k \in \mathcal{P}$ gewählt. Zur Diskretisierung des Problems wird der Ansatz

$$w_k(u, v) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} v^{k-j} w_{(0)j}(u) + \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k v^{k+1-j} \binom{k+1}{j} w^*[\alpha_j](u), \quad k \in \mathbb{N}, u, v \in \mathbb{R} \quad (6.147)$$

mit

$$w_{(0)k}(u) := \sum_{i \in I_1} c_{ki} \phi_i(u), \quad k \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{R} \quad (6.148)$$

und

$$w^*[\alpha_k](u) := \sum_{i \in I_2} c_{ki} (\phi_{i_1(i)}(u) - \phi_{i_2(i)}(u)), \quad k \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{R} \quad (6.149)$$

gewählt. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in Gleichung (6.91) ergibt sich

$$0 = \int_{\mathcal{K}} \left(f_k(\mathbf{x}) - h \left[\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \bullet_2^{k-j} w_{(0)j}(\bullet_1) - \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} \bullet_2^{k+1-j} w^*[\alpha_j](\bullet_1) \right] (\mathbf{x}) \right) h[\bar{w}](\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}, \quad \bar{w} \in \mathcal{C}_C(\mathcal{E}, \mathbb{R}). \quad (6.150)$$

Daraus folgt

$$0 = \int_{\mathcal{K}} \left(\tilde{f}_k(\mathbf{x}) - h[w_{(0)k}(\bullet_1)](\mathbf{x}) - \frac{1}{k+1} h[\bullet_2 w^*[\alpha_k](\bullet_1)](\mathbf{x}) \right) h[\bar{w}](\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}, \quad \bar{w} \in \mathcal{C}_C(\mathcal{E}, \mathbb{R}) \quad (6.151)$$

mit

$$\tilde{f}_k(\mathbf{x}) := f_k(\mathbf{x}) - h \left[\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \bullet_2^{k-j} w_{(0)j}(\bullet_1) \right] (\mathbf{x}) - h \left[\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} \bullet_2^{k+1-j} w^*[\alpha_j](\bullet_1) \right] (\mathbf{x}). \quad (6.152)$$

Analog zum Fall eindeutiger Lösungen werden die Testfunktionen

$$\bar{w}_l(u, v) = \delta_0(v) \phi_l(u), \quad l = 1, \dots, D_E \quad (6.153)$$

verwendet. Aus den Gleichungen (6.151) und (6.153) folgt

$$0 = \int_{\mathcal{K}} \left(\tilde{f}_k(\mathbf{x}) - h[w_{(0)k}(\bullet_1)](\mathbf{x}) - \frac{1}{k+1} h[\bullet_2 w^*[\alpha_k](\bullet_1)](\mathbf{x}) \right) h[\delta_0(\bullet_2) \phi_l(\bullet_1)](\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}, \quad l = 1, \dots, D_E. \quad (6.154)$$

Daraus folgt mit Gleichung (6.59)

$$0 = \int_{\mathcal{K}} \left(\tilde{f}_k(\mathbf{x}) - h[w_{(0)k}](\mathbf{x}) - \frac{1}{k+1} h[\bullet_2 w^*[\alpha_k](\bullet_1)](\mathbf{x}) \right) \delta_0(\mathbf{l}_{\Gamma(l)} \circ \mathbf{x} - o_{\Gamma(l)}) h[\phi_l](\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}, \quad l = 1, \dots, D_E. \quad (6.155)$$

Es wird wieder die Darstellung $\mathbf{x} = \mathbf{x}_E + \eta \mathbf{n}$, $\mathbf{x}_E \in E_0$, $\eta \in \mathbb{R}$ verwendet. Analog zur Rechnung von Gleichung (6.109) bis Gleichung (6.113) lässt sich die Aussage treffen, dass für alle $g \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathbb{R})$ die Formel

$$\int_{\mathcal{K}} g(\mathbf{x}) \delta_0(\mathbf{l}_{\Gamma(l)} \circ \mathbf{x} - o_{\Gamma(l)}) d^3 \mathbf{x} = \int_{\mathcal{B}} g(\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E) \mathbf{n}) d^2 \mathbf{x}_E, \quad l = 1, \dots, D_E \quad (6.156)$$

mit $\bar{\eta}(\mathbf{x}_E) = -(\mathbf{l}_{\Gamma(l)} \circ \mathbf{x}_E - o_{\Gamma(l)})$ gilt.

Aus den Gleichungen (6.155), (6.156) und (6.59) folgt

$$0 = \int_{\mathcal{B}} \left(\tilde{f}_k(\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E) \mathbf{n}) - h[w_{(0)k}](\mathbf{x}_E) - \frac{1}{k+1} h[\bullet_2 w^*[\alpha_k](\bullet_1)](\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E) \mathbf{n}) \right) h[\phi_l](\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (6.157)$$

Aus dieser Gleichung wird im Folgenden ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten c_{ki} von $w_{(0)k}$ und α_k ermittelt. Es gilt nach Definition von F_{kl} in Gleichung (6.115)

$$\int_{\mathcal{B}} f_k(\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E) \mathbf{n}) h[\phi_l](\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E = F_{kl}. \quad (6.158)$$

Aus Gleichung (6.148) folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} h[w_{(0)k}](\mathbf{x}_E) h[\phi_l](\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E &= \int_{\mathcal{B}} \sum_{i \in I_1} c_{ki} h[\phi_i](\mathbf{x}_E) h[\phi_l](\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E \\ &= \sum_{i \in I_1} c_{ki} E_{il}, \end{aligned} \quad (6.159)$$

wobei im zweiten Schritt die Gleichung (6.105) verwendet wurde. Für

$$K_{m,j,l} := \int_{\mathcal{B}} h[\bullet_2^m w_{(0)j}(\bullet_1)](\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E) \mathbf{n}) h[\phi_l](\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E, \quad l = 1, \dots, D_E, j, m \in \mathbb{N} \quad (6.160)$$

folgt aus Gleichung (6.148)

$$K_{m,j,l} = \int_{\mathcal{B}} \sum_{i \in I_1} c_{ji} h[\bullet_2^m \phi_i(\bullet_1)] h[\phi_l](\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E, \quad l = 1, \dots, D_E, j, m \in \mathbb{N}. \quad (6.161)$$

Mittels aufeinander folgender Anwendung der Gleichungen (6.59), (6.112) und (6.107) ergibt sich

$$\begin{aligned} K_{m,j,l} &= \sum_{i \in I_1} c_{ji} \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{l}_{\Gamma(i)} \circ (\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E) \mathbf{n}) - o_{\Gamma(i)})^m h[\phi_i](\mathbf{x}_E) h[\phi_l](\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E \\ &= \sum_{i \in I_1} c_{ji} \int_{\mathcal{B}} ((\mathbf{l}_{\Gamma(i)} - \mathbf{l}_{\Gamma(l)}) \circ \mathbf{x}_E - (o_{\Gamma(i)} - o_{\Gamma(l)}))^m h[\phi_i](\mathbf{x}_E) h[\phi_l](\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E \\ &= \sum_{i \in I_1} c_{ji} B_{m,i,l}, \quad l = 1, \dots, D_E, j, m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (6.162)$$

Für

$$P_{m,j,l} := \int_{\mathcal{B}} h[\bullet_2^m w^*[\alpha_j](\bullet_1)](\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E) \mathbf{n}) h[\phi_l](\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E, \quad l = 1, \dots, D_E, j, m \in \mathbb{N} \quad (6.163)$$

folgt durch Einsetzen von Gleichung (6.149)

$$P_{m,j,l} = \int_{\mathcal{B}} \sum_{i \in I_2} c_{ji} h[\bullet_2^m(\phi_{i_1(i)}(\bullet_1) - \phi_{i_2(i)}(\bullet_1))](\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E)\mathbf{n}) h[\phi_l](\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E. \quad (6.164)$$

Daraus wird mit Gleichung (6.59) und $h[\phi_{i_1(i)}](\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E)\mathbf{n}) = h[\phi_{i_1(i)}](\mathbf{x}_E)$

$$P_{m,j,l} = \sum_{i \in I_2} c_{ji} \int_{\mathcal{B}} ((\mathbf{l}_{\Gamma(i_1(i))} \circ (\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E)\mathbf{n}) - o_{\Gamma(i_1(i))})^m h[\phi_{i_1(i)}](\mathbf{x}_E) - (\mathbf{l}_{\Gamma(i_2(i))} \circ (\mathbf{x}_E + \bar{\eta}(\mathbf{x}_E)\mathbf{n}) - o_{\Gamma(i_2(i))})^m h[\phi_{i_2(i)}](\mathbf{x}_E)) h[\phi_l](\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E. \quad (6.165)$$

Daraus folgt mit $h[\phi_{i_1(i)}] = h[\phi_{i_2(i)}]$ und Gleichung (6.112)

$$P_{m,j,l} = \sum_{i \in I_2} c_{ji} \int_{\mathcal{B}} (((\mathbf{l}_{\Gamma(i_1(i))} - \mathbf{l}_{\Gamma(l)}) \circ \mathbf{x}_E - (o_{\Gamma(i_1(i))} - o_{\Gamma(l)}))^m - ((\mathbf{l}_{\Gamma(i_2(i))} - \mathbf{l}_{\Gamma(l)}) \circ \mathbf{x}_E - (o_{\Gamma(i_2(i))} - o_{\Gamma(l)}))^m) h[\phi_{i_1(i)}](\mathbf{x}_E) h[\phi_l](\mathbf{x}_E) d^2 \mathbf{x}_E. \quad (6.166)$$

Mit Gleichung (6.107) folgt

$$P_{m,j,l} = \sum_{i \in I_2} c_{ji} (B_{m,i_1(i),l} - B_{m,i_2(i),l}), \quad m, j \in \mathbb{N}, l = 1, \dots, D_E. \quad (6.167)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (6.158) bis (6.160), (6.162), (6.163) und (6.167) in Gleichung (6.157) ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= F_{kl}^* - \sum_{i \in I_1} c_{ki} E_{il} - \frac{1}{k+1} P_{1,k,l} \\ &= F_{kl}^* - \sum_{i \in I_1} c_{ki} E_{il} - \frac{1}{k+1} \sum_{i \in I_2} c_{ki} (B_{1,i_1(i),l} - B_{1,i_2(i),l}), \quad k \in \mathbb{N}, l = 1, \dots, D_E \end{aligned} \quad (6.168)$$

mit

$$\begin{aligned} F_{kl}^* &= F_{kl} - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} K_{k-j,j,l} - \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} P_{k+1-j,j,l} \\ &= F_{kl} - \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i \in I_1} \binom{k}{j} c_{ji} B_{k-j,i,l} - \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i \in I_2} \binom{k+1}{j} c_{ji} (B_{k+1-j,i_1(i),l} - B_{k+1-j,i_2(i),l}). \end{aligned} \quad (6.169)$$

Die Beziehung (6.168) ist ein lineares Gleichungssystem, welches als Variablen die gesuchten c_{ki} enthält. Es tritt dabei aber folgendes Problem auf: Wegen $h[\phi_{i_1(l)}] = h[\phi_{i_2(l)}]$ gilt

$$E_{ii_2(l)} = E_{ii_1(l)}, \quad (6.170)$$

$$F_{0i_2(l)} = F_{0i_1(l)}, \quad (6.171)$$

$$B_{1,i_1(i),i_2(l)} - B_{1,i_2(i),i_2(l)} = B_{1,i_1(i),i_1(l)} - B_{1,i_2(i),i_1(l)}, \quad l \in I_2, i \in I. \quad (6.172)$$

Aus diesem Grund hat die Koeffizientenmatrix im Gleichungssystem (6.168) nicht den vollen Rang. Das Gleichungssystem (6.168) ist deshalb unterbestimmt und zur Berechnung von c_{ki}

nicht ausreichend. Die Forderung an eine Funktion, Lösung des verallgemeinerten Quadratmittelproblems zu sein, legt diese Funktion also für identische Führungsgeraden nicht hinreichend fest. Die gefundene Lösungsform (6.147) kann jedoch in einem Quadratmittelproblem mit beschränktem Objektbereich \mathcal{K} verwendet werden, obwohl dies vom theoretischen Standpunkt aus nicht überzeugend erscheint, da die Lösungsform unter der Voraussetzung, dass der Objektbereich \mathcal{K} translationsinvariant und demzufolge nicht beschränkt ist, abgeleitet wurde. Es ist anzumerken, dass die weiter oben gefundene Lösung zur Näherung konstanter Funktionen bei zusammenfallenden Führungsgeraden eine Lösung des verallgemeinerten Quadratmittelproblems ist, da das Gleichungssystem (6.128) dem Gleichungssystem (6.168) für $l \in I_1$ entspricht und das Gleichungssystem (6.168) für $l \in I_2$ keine zusätzlichen Gleichungen enthält.

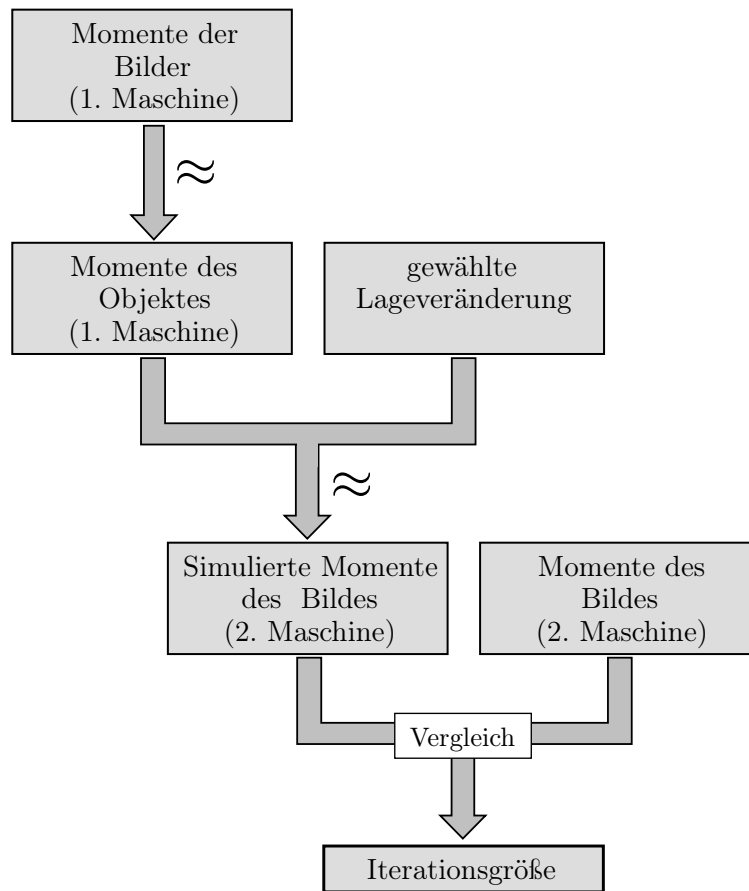


Abbildung 6.8.: Bestimmung der Iterationsgröße mittels Vergleich zwischen simulierten und gemessenen Größen

Zusammenfassend bietet sich folgendes Vorgehen an:

- Zur Berechnung der Näherung in Führungsgeradenrichtung konstanter Momentenfunktionen wird das Gleichungssystem (6.168) benutzt.
- Für nicht konstante Momentenfunktionen wird von jeweils zwei Fächerscharen mit identischer Führungsgeraden jeweils nur eine Fächerschar benutzt, so dass Satz 6.2.3 zur Berechnung der Näherung verwendet werden kann.

Weitere Vorgehensweise: In den Punkten 6.2.1 bis 6.2.3 wurden jeweils Methoden entwickelt, um die Momente des Objektes aus den Momenten der Bilder näherungsweise berechnen zu können. Mit diesen Berechnungsvorschriften lassen sich umgekehrt auch die Momente der Bilder aus denen

des Objektes bestimmen. Diese Zusammenhänge werden genutzt, um ein Iterationsverfahren für die Positionswiederfindung zu entwickeln. Die Bestimmung der Iterationsgröße $I(\mathbf{T})$ ist in Abbildung 6.8 dargestellt.

Die Momente des Objektes werden näherungsweise aus den Momenten der Bilder der ersten Maschine berechnet. Zu jeder Lageveränderung \mathbf{T} lassen sich aus diesen Momenten die Näherungen der Momente des Bildes der zweiten Maschine, zusammengefasst in $\mathbf{m}_{2,Sim}(\mathbf{T})$, simulieren. Die Differenz zwischen diesen Momenten und den in \mathbf{m}_2 zusammengefassten gemessenen Momenten liefert mittels Quadratsummenbildung einen Wert $I(\mathbf{T})$, welcher als Iterationsgröße zur Bestimmung der korrekten Lageveränderung \mathbf{T} geeignet ist. Statt einer einfachen Quadratsumme können allgemeiner die Differenzen zwischen N_L Linearkombinationen $\mathbf{c}_i^T \mathbf{m}_{2,Sim}$ und $\mathbf{c}_i^T \mathbf{m}_2$, $i = 1, \dots, N_L$ bestimmt werden, so dass sich für die Iterationsgröße $I(\mathbf{T})$ der Ausdruck

$$I(\mathbf{T}) = \sum_{i=1}^{N_L} d_i (\mathbf{c}_i^T \mathbf{m}_{2,Sim}(\mathbf{T}) - \mathbf{c}_i^T \mathbf{m}_2)^2 \quad (6.173)$$

ergibt. Die Wichtungsfaktoren d_i geben an, in welchem Maße die einzelnen Differenzen in die Iterationsgröße eingehen.

Die simulierten Momente des Bildes der zweiten Maschine sind auch bei korrekter Lage nur Näherungen. Für verschiedene Linearkombinationen von Momenten sind diese Näherungen unterschiedlich genau. Deshalb müssen für den Vergleich mit den gemessenen Momenten die Linearkombinationen von Momenten mit guten Näherungen herangezogen und dabei die mit besseren Näherungen stärker gewichtet werden. Die Genauigkeit der Näherungen einiger Linearkombinationen von Momenten wurde für eine Auswahl simulierter Beispiele bestimmt. Anhand dieser Genauigkeiten wurden die Werte für \mathbf{c}_i und d_i festgelegt. Die so bestimmte Iterationsgröße führte bei diesen Beispielen zu guten Ergebnissen. Es stellte sich aber heraus, dass diese Iterationsgröße bei Anwendung auf weitere Beispiele nicht zuverlässig zu verwertbaren Ergebnissen führte. Eine manuelle Bestimmung der \mathbf{c}_i und d_i und damit einer für alle Beispiele geeigneten Iterationsgröße gelang also nicht. Um dieses Problem zu lösen, wurde die nachfolgend beschriebene Methode entwickelt.

6.3. Bestimmung einer geeigneten Iterationsgröße - Inkonsistenzanalyse

Unter Vorgabe einer Lageveränderung können aus den Momenten der Bilder der ersten Maschine die Momente der Bilder der zweiten Maschine simuliert werden. Je weniger diese simulierten mit den gemessenen Werten der Momente übereinstimmen, desto größer ist der Wert der Iterationsgröße. Für jede Lageveränderung ist der zugehörige Wert der Iterationsgröße ein Maß für die Inkonsistenz der Momente der Bilder der ersten und der zweiten Maschine.

In die Iterationsgröße gehen die unbekannten und bisher nicht berechenbaren Größen \mathbf{c}_i und d_i ein. Es wird im Folgenden ein direkter Ansatz zur Bestimmung der Inkonsistenz zwischen den Momenten der Bilder der ersten und der zweiten Maschine betrachtet, mit welchem es gelingt, auf die Bestimmung von \mathbf{c}_i und d_i zu verzichten. Es wird sich zeigen, dass die so gewonnene Gleichung für die Iterationsgröße im Sinne des Ansatzes (6.173) interpretierbar ist. Damit könnten \mathbf{c}_i und d_i explizit abgeleitet werden.

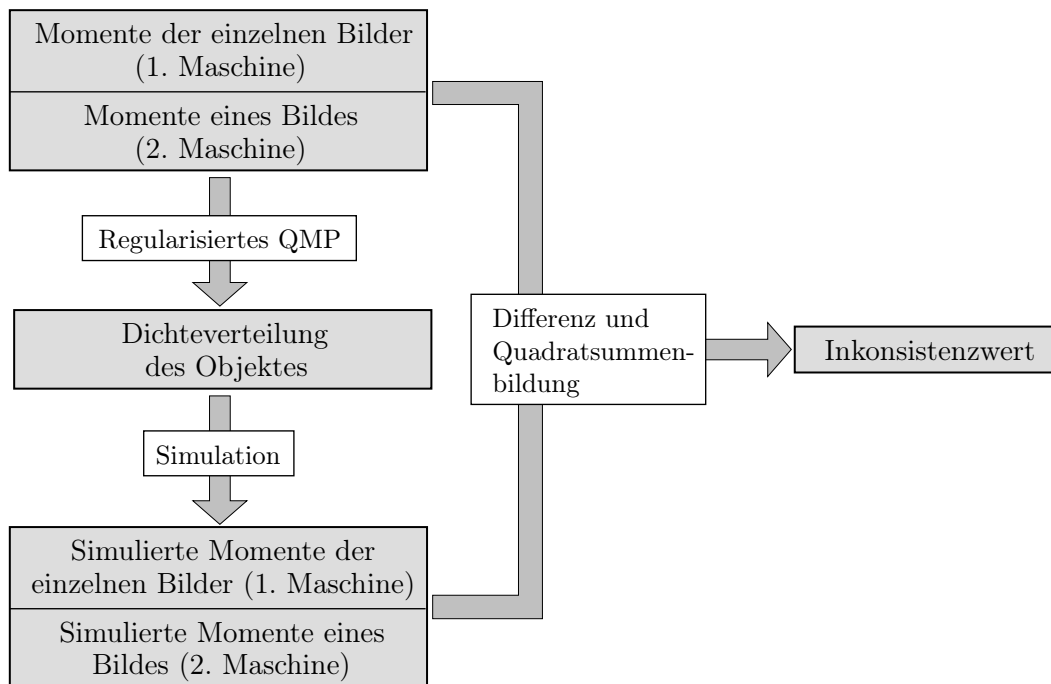


Abbildung 6.9.: Bestimmung der Iterationsgröße mittels Inkonsistenzanalyse

Es wird wie folgt vorgegangen (Abbildung 6.9):

- Die Momente der Bilder der ersten und der zweiten Maschine werden zu einem Messwertdatensatz zusammengefasst.
- Das durch seine Dichteverteilung beschriebene Objekt, welches am besten zu diesen Messwerten passt, wird mittels eines Tichonov-regularisierten QMPs [32,33] rekonstruiert.
- Es wird der Approximationsfehler der Lösung des QMPs bestimmt.

Der Approximationsfehler ist ein Maß für die Inkonsistenz der beiden Datensätze und folglich als Iterationsgröße geeignet.

Bei diesem Ansatz ist es prinzipiell möglich, eine große Anzahl von aus den Bildern bestimmten Messwerten zu verwenden. In Abbildung 6.10 und Abbildung 6.11 ist der Extremfall dargestellt, dass für die Inkonsistenzanalyse die kompletten Bilder und nicht nur einzelne daraus abgeleitete Messwerte benutzt werden.

In der Praxis ergibt sich eine Einschränkung durch die verfügbare Rechenzeit. Die Verwendung der Momente bis zur Ordnung k entspricht einer Tiefpassfilterung der Bilder vor der Inkonsistenzanalyse. Die Ergebnisse dieser Filterung sind für bestimmte Werte von k in Abbildung 6.12 dargestellt. Es ergeben sich geglättete Bilder, deren Momente bis zur Ordnung k den Momenten der ungefilterten Bilder entsprechen.

Bei dem hier vorgestellten Ansatz muss lediglich der Parameter für die Tichonov-Regularisierung bestimmt werden.

Eine gute Iterationsgröße sollte für die korrekte Lageveränderung einen im Vergleich zu den übrigen Lagen möglichst kleinen Wert annehmen. Da die hier betrachteten durch Quadratsum-

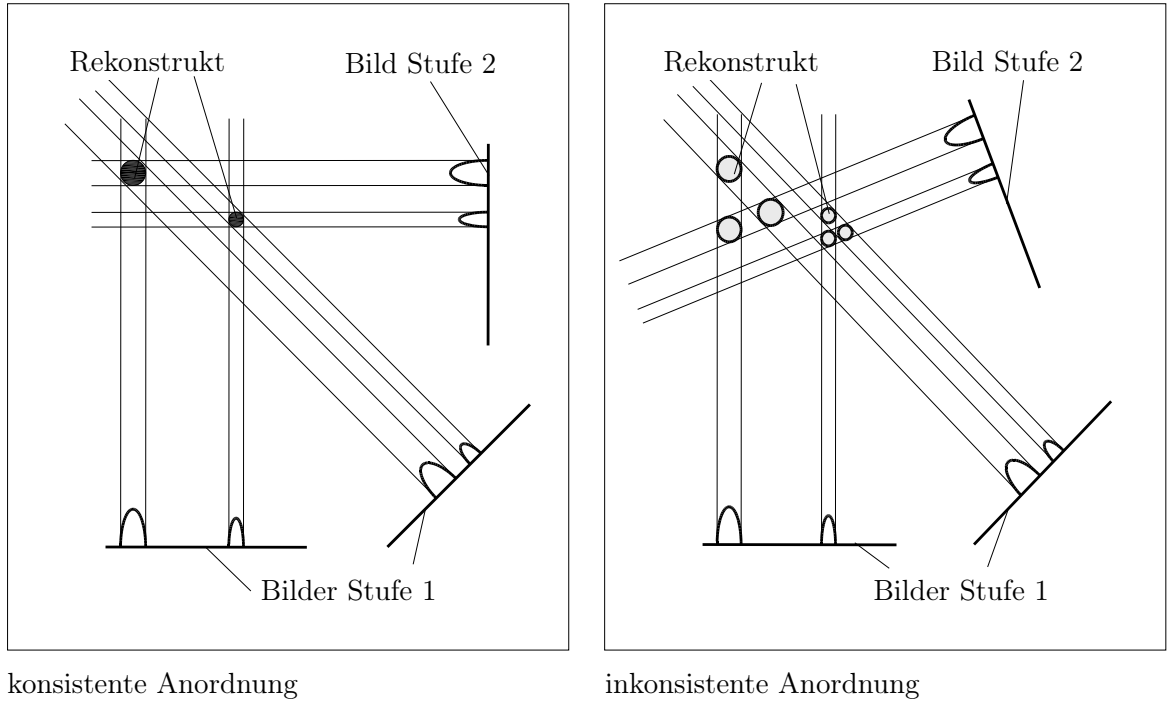


Abbildung 6.10.: Konsistente und inkonsistente Anordnung

menbildung erzeugten Iterationsgrößen stets positiv sind, sollte eine gute Iterationsgröße für die korrekte Lageveränderung einen Wert nahe Null⁵ annehmen.

Im bisherigen Verfahren erhält die Iterationsgröße für die korrekte Lageveränderung bereits dadurch einen von Null verschiedenen Wert, dass die miteinander verglichenen Momente nur mittels Näherungen berechnet werden. Dies ist im hier verwendeten Ansatz nicht der Fall. Der Inkonsistenzwert wird allerdings auch hier für die korrekte Lage nicht Null, da die Messfehler in den Bildern sowie infolge der Regularisierung auch die Norm der bestimmten Dichteverteilung mit in den Inkonsistenzwert eingehen.

Zu den gemessenen Grauwertverteilungen $L_{(1)l, mess}(u, v)$, $l = 1, \dots, N$ der N Bilder der Maschine der ersten Stufe lassen sich nach Vorgabe von pro Bild N_M Bildwichtungsfunktionen $w_{(1)l, i}$, $l = 1, \dots, N$, $i = 1, \dots, N_M$ die Messwerte

$$m_{(1)l, i} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w_{(1)l, i}(u, v) L_{(1)l, mess}(u, v) du dv \quad (6.174)$$

berechnen. Zu jeder Dichte μ lassen sich mit den zu den Bildwichtungsfunktionen $w_{(1)l, i}$ mittels Gleichung (5.43) zugeordneten Objektwichtungsfunktionen $h_{(1)\mathbf{q}_l, \mathbf{n}_l, \mathbf{r}_l, a_l \mathbf{f}_l}[w_{(1)l, i}]$ simulierte Messwerte $m_{(1, Sim)l, i}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^3} h_{(1)\mathbf{q}_l, \mathbf{n}_l, \mathbf{r}_l, a_l \mathbf{f}_l}[w_{(1)l, i}](\mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}$ (siehe Gleichung (5.42)) bestimmen. Aufgrund von Messungenauigkeiten stimmen auch für die wirkliche Dichte μ_{real} des Objektes die simulierten nur annähernd mit den gemessenen Werten überein, also $m_{(1, Sim)l, i}(\mu_{real}) \approx m_{(1)l, i}$.

Die analog zur Gleichung (6.174) definierten Messwerte $m_{(2), i}$ des Bildes der Maschine der zweiten Stufe stimmen nur für die korrekte Lageveränderung \mathbf{T} mit den simulierten Messwerten $m_{(2, Sim)i}(\mathbf{T}, \mu) = \int_{\mathbb{R}^3} h_{(2)\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, a \mathbf{f}}[w_{(2)i}](\mathbf{x}) \mu(\mathbf{T}\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}$ überein.

⁵klein in Bezug zu den Werten für nicht korrekte Lageveränderungen

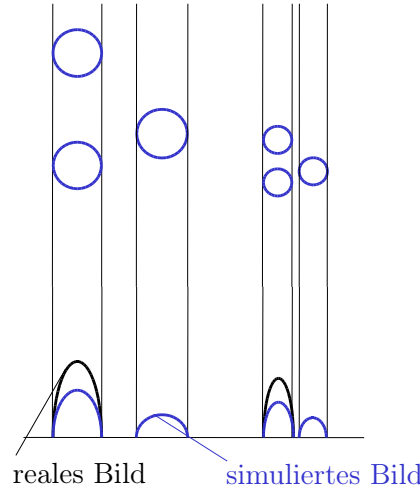


Abbildung 6.11.: Vergleich des simulierten Bildes einer inkonsistenten Anordnung mit dem realen Bild

Es seien $\sum_{l,i} c_{(1)l,i} w_{(1)l,i}$ und $\sum_i c_{(2)i} w_{(2)i}$ Linearkombinationen von Bildwichtungsfunktionen der Maschinen der ersten und zweiten Stufe, für die die zugehörigen Linearkombinationen von Objektwichtungsfunktionen für eine Lageveränderung \mathbf{T} näherungsweise übereinstimmen, also

$$\sum_{l,i} c_{(1)l,i} h_{(1)\mathbf{q}_l, \mathbf{n}_l, \mathbf{r}_l, \mathbf{a}_l \mathbf{f}_l} [w_{(1)l,i}](\mathbf{x}) \approx \sum_i c_{(2)i} h_{(2)\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{a} \mathbf{f}} [w_{(2)i}](\mathbf{T}\mathbf{x}) \quad (6.175)$$

gilt.

Für real vorkommende Objekte liegt die Dichte $\mu(\mathbf{x})$ innerhalb eines physikalisch vorgegebenen Wertebereichs. Deshalb liegt die Norm $\|\mu\|_{\mathcal{K}} := \sqrt{\int_{\mathcal{K}} (\mu(\mathbf{x}))^2 d^3\mathbf{x}}$ der Dichteverteilung eines realen Objektes ebenfalls in einem gewissen Wertebereich. Für diese Dichteverteilungen gilt, dass die zugehörigen simulierten Messwerte näherungsweise gleich sein müssen, also

$$\sum_{l,i} c_{(1)l,i} m_{(Sim,1)l,i}(\mathbf{T}, \mu) \approx \sum_i c_{(2)i} m_{(Sim,2)i}(\mu). \quad (6.176)$$

Konsistente Messwertsätze zeichnen sich dadurch aus, dass ein reales Objekt existiert, mit welchem sie sich simulieren lassen. Es gilt also

$$\sum_{l,i} c_{(1)l,i} m_{(1)l,i} \approx \sum_i c_{(2)i} m_{(2)i}. \quad (6.177)$$

Für inkonsistente Datensätze gibt es kein entsprechendes reales Objekt. Es gibt allerdings Dichteverteilungen mit unrealistisch großer Norm, für die

$$\sum_{l,i} c_{(1)l,i} m_{(Sim,1)l,i}(\mathbf{T}, \mu) \neq \sum_i c_{(2)i} m_{(Sim,2)i}(\mu) \quad (6.178)$$

gilt. Bei unregularisierten Quadratmittelpunkten sind solche Dichteverteilungen erlaubt, so dass trotz $\sum_{l,i} c_{(1)l,i} m_{(1)l,i}(\mathbf{T}, \mu) \neq \sum_i c_{(2)i} m_{(2)i}(\mu)$ keine Inkonsistenz festgestellt werden kann. Aus diesem Grund wird eine Tichonov-Regularisierung durchgeführt, welche Dichteverteilungen mit unrealistisch großer Norm unterdrückt.

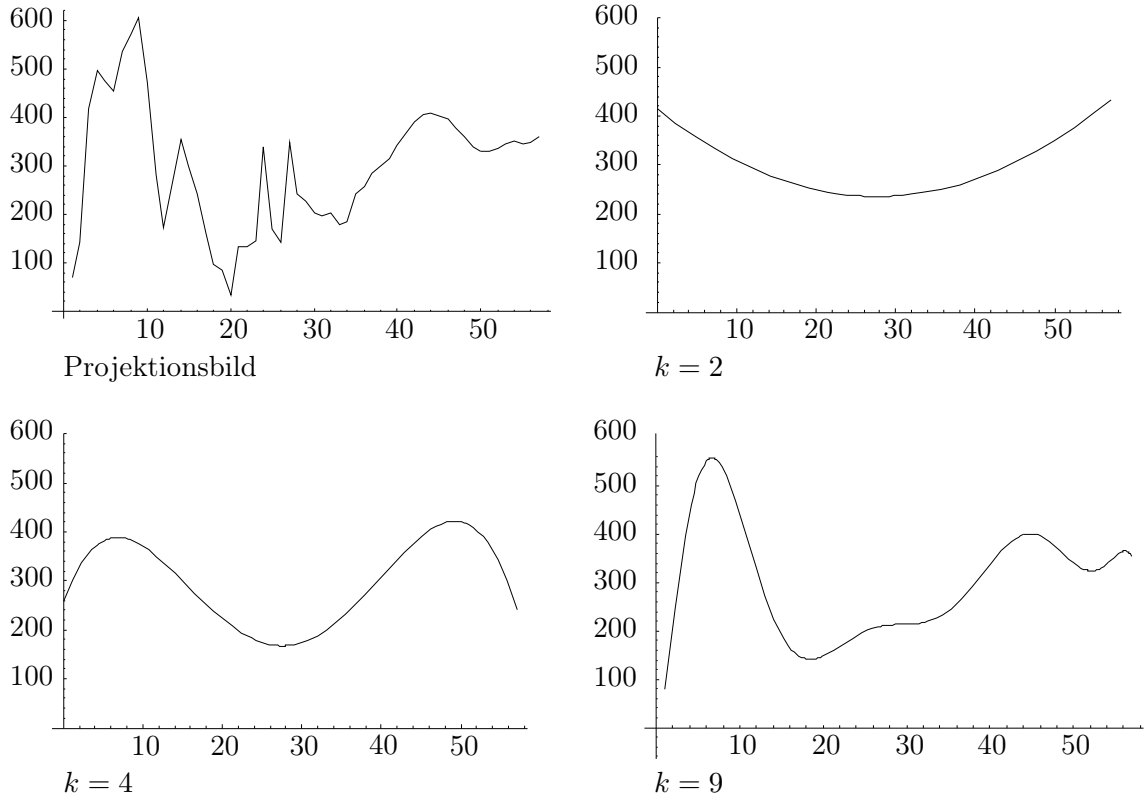


Abbildung 6.12.: Quadratmittelnäherung eines eindimensionalen Projektionsbildes durch Polynome bis zur Ordnung k

Die Messwerte $m_{(1)l,i}$ werden zu einem Messwertvektor \mathbf{m}_1 zusammengefasst, wobei jedem Indexpaar (l,i) ein Index zugeordnet wird. N_1 sei die Anzahl der Indexpaare (l,i) , so dass $\mathbf{m}_1 \in \mathbb{R}^{N_1}$ gilt. Analog wird für die übrigen von l und i abhängigen Größen vorgegangen. \mathbf{W}_1 sei der lineare Operator, der einem Koeffizientenvektor \mathbf{c} eine Linearkombination der Bildwichtungsfunktionen $w_{(1)l,i}$ zuordnet, also $(\mathbf{W}_1 \mathbf{c})(l,u,v) := \sum_{l,i} w_{(1)l,i}(u,v) c_{l,i}$. Auf diese Weise werden die Bildwichtungsfunktionen $w_{(1)l,i}$ zu einem linearen Operator zusammengefasst, ähnlich wie sich einzelne Komponenten zu einem Vektor zusammenfassen lassen. \mathbf{H}_1 sei der lineare Operator, der einer Bildwichtungsfunktion die entsprechende Objektwichtungsfunktion mittels Gleichung (5.43) zuordnet. Der lineare Operator $\mathbf{B}_1 := \mathbf{H}_1 \mathbf{W}_1$ ordnet also einem Koeffizientenvektor \mathbf{c} die entsprechende Objektwichtungsfunktion $\mathbf{B}_1 \mathbf{c} = h_{(1)}[\sum_{l,i} w_{(1)l,i} \mathbf{c}_{l,i}]$ zu. Der zu \mathbf{W}_1 gehörende Messwertvektor $\mathbf{m}_{1,Sim}$ ist

$$\mathbf{m}_{1,Sim} = \int_{\mathcal{K}} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}) \mu(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_1^T \mu, \quad (6.179)$$

wobei \mathbf{B}_1^T der zu \mathbf{B}_1 adjungierte Operator ist. Analoge Beziehungen gelten für die Größen \mathbf{W}_2 , $\mathbf{H}_2(\mathbf{T})$, $\mathbf{B}_2(\mathbf{T})$, $\mathbf{m}_{2,Sim}$ und \mathbf{m}_2 der zweiten Maschine, wobei die die Projektion beschreibenden Größen $\mathbf{H}_2(\mathbf{T})$, $\mathbf{B}_2(\mathbf{T})$ im hier verwendeten körperfesten Koordinatensystem von der Lageveränderung \mathbf{T} abhängen. Insbesondere gilt $(\mathbf{B}_2(\mathbf{T}) \mathbf{c})(\mathbf{x}) = h_{(2)}[\sum_i w_{(2)l,i} \mathbf{c}_i](\mathbf{T}^{-1} \mathbf{x})$. Die Werte der simulierten Messwerte $\mathbf{m}_{2,Sim}(\mathbf{T}) = \mathbf{B}_2^T(\mathbf{T}) \mu$ entsprechen für die korrekte Lageveränderung \mathbf{T}_{korr} den gemessenen Werten \mathbf{m}_2 , also gilt $\mathbf{m}_{2,Sim}(\mathbf{T}_{korr}) \mu \approx \mathbf{m}_2$.

Die zu den Messdaten $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ bestmöglich passende Dichteverteilung μ_{opt} lässt sich zu jeder Lageveränderung \mathbf{T} durch Betrachtung des Tichonov-regularisierten Quadratmittelproblems

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{B}_2^T(\mathbf{T}) \end{pmatrix} \mu - \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} \right\|^2 + \alpha \|\mu\|_{\mathcal{K}}^2 \rightarrow \min_{\mu} \quad (6.180)$$

finden [33]. Dabei wird im Folgenden für die Dichteverteilung ein endlichdimensionaler Ansatzraum gewählt. Dazu wird der Objektbereich in Voxel unterteilt. Die charakteristischen Funktionen⁶ der einzelnen Voxel bilden die Basis des Ansatzraumes der Dichteverteilung μ . Durch diese Diskretisierung werden die obigen Operatoren endlichdimensional.

Aus Gleichung (6.180) folgt

$$\mu_{opt} := \underset{\mu}{\operatorname{argmin}} \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{B}_2^T(\mathbf{T}) \end{pmatrix} \mu - \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} \right\|^2 + \alpha \|\mu\|_{\mathcal{K}}^2. \quad (6.181)$$

Die Lösung dieses Tichonov-regularisierten QMPs ist

$$\mu_{opt} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad (6.182)$$

wobei

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{B}_2^T(\mathbf{T}) \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} := \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} \quad (6.183)$$

gesetzt wurde. Das Residuum \mathbf{r} des Tichonov-regularisierten QMPs ergibt sich als

$$\mathbf{r} := \mathbf{A} \mu_{opt} = \underbrace{(\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T - \mathbf{I})}_{=: \mathbf{R}} \mathbf{b}. \quad (6.184)$$

Der Wert $I := \|\mathbf{r}\|^2$ ist das Maß für die Inkonsistenz zwischen den Datensätzen und ergibt sich zu

$$I = \mathbf{b}^T \mathbf{L} \mathbf{b} \quad (6.185)$$

mit $\mathbf{L} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$. Die angenommene Lage des Objektes in der zweiten Maschine geht über $\mathbf{B}_2(\mathbf{T})$ in den Inkonsistenzwert I ein. Mittels Iteration lässt sich die Lage mit der geringsten Inkonsistenz finden.

Die Bildwichtungsfunktionen und damit die zugehörigen Objektwichtungsfunktionen sollten so gewählt werden, dass der Inkonsistenzwert zum einen empfindlich auf Lageveränderungen reagiert und zum anderen unempfindlich gegenüber Bildfehlern ist. Dies wird erreicht, indem gefordert wird, dass

- die Messwerte möglichst unabhängig und möglichst in der gleichen Größenordnung auf Veränderungen der Dichte μ , welche durch die Lageveränderung hervorgerufen wird, reagieren und
- die Messwerte nur schwach mit Messfehlern behaftet sind.

Die erste Bedingung wird erfüllt, wenn die Objektwichtungsfunktionen bezüglich des Skalarproduktes im Objektraum orthonormal sind, also gilt

$$\mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_1 = \mathbf{I}. \quad (6.186)$$

⁶Die charakteristische Funktion eines Voxels ist die Funktion, welche jedem Punkt des Voxels den Wert 1 und den übrigen Punkten des Objektbereiches den Wert 0 zuordnet.

Es wird angenommen, dass die durch Messungenauigkeiten entstehenden Messfehler proportional zur Norm der Bildwichtungsfunktion sind. Die Fehleranfälligkeit wird durch die Forderung, dass für alle \mathbf{c} die Beziehung $\|\mathbf{W}_1 \mathbf{c}\|^2 \leq \Omega \|\mathbf{c}\|^2$ beziehungsweise

$$\mathbf{c}^T \mathbf{W}_1^T \mathbf{W}_1 \mathbf{c} \leq \Omega \mathbf{c}^T \mathbf{c} \quad (6.187)$$

gilt, begrenzt. Dabei ist ein zur Messungenauigkeit passendes $\Omega \in (0, \infty)$ zu wählen.

Es wird ein Ansatzraum für die Bildwichtungsfunktionen gewählt. Dieser Ansatzraum kann zum Beispiel die lineare Hülle der Momentenfunktionen der Bilder bis zu einer niedrigen Ordnung k sein, da sich die Momente, wie in den vorhergehenden Kapiteln gezeigt, gut für die Positionswiederfindung eignen.

Die Basis des Ansatzraumes sei im Operator $\tilde{\mathbf{W}}_1$ und die zugehörigen Objektwichtungsfunktionen seien in $\tilde{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{H}_1 \tilde{\mathbf{W}}_1$ zusammengefasst. Mittels eines Orthonormierungsverfahrens werden orthonormierte Linearkombinationen der Objektwichtungsfunktionen bestimmt, welche im Operator $\bar{\mathbf{B}}_1 = \tilde{\mathbf{B}}_1 \hat{\mathbf{C}}_1$ zusammengefasst sind. Die Matrix $\hat{\mathbf{C}}_1$ beschreibt dabei die Linearkombinationen. Es wird das Eigensystem von $\tilde{\mathbf{W}}_1^T \tilde{\mathbf{W}}_1$ bestimmt, wobei $\tilde{\mathbf{W}}_1 = \tilde{\mathbf{W}}_1 \hat{\mathbf{C}}_1$ ist. Die orthonormierten Eigenvektoren zu den Eigenwerten, welche nicht größer als M^2 sind, werden in der Matrix $\hat{\mathbf{C}}_1$ zusammengefasst. Der Operator $\mathbf{W}_1 = \bar{\mathbf{W}}_1 \hat{\mathbf{C}}_1$ erfüllt die Bedingung (6.187). Da die Matrix $\bar{\mathbf{W}}_1^T \bar{\mathbf{W}}_1$ symmetrisch ist und deshalb zueinander orthogonale Eigenvektoren hat, erfüllt $\mathbf{B}_1 = \bar{\mathbf{B}}_1 \hat{\mathbf{C}}_1$ die Bedingung (6.186). Analog dazu wird bei der zweiten Maschine vorgegangen.

Somit wurde ein Verfahren entwickelt, mit welchem die Bestimmung einer Iterationsgröße für die Positionswiederfindung theoretisch durchführbar ist. Für die praktische Anwendung hat das Verfahren in dieser Form aus folgenden Gründen noch einen viel zu großen Rechenaufwand:

- Das Bestimmen der Lösung μ_{opt} des regularisierten QMPs ist sehr rechenaufwändig, da sich bei der Diskretisierung eine sehr hohe Variablenanzahl ergibt.
- Das Aufstellen des QMPs muss für jede Lage neu erfolgen. Es ist jedoch zu rechenaufwändig, um es für eine Vielzahl von Lagen durchzuführen.

Zur Lösung des ersten Problems wurde eine Möglichkeit gefunden, das Residuum eines regularisierten QMPs (siehe Gleichung (6.184)) mit geringem Rechenaufwand zu berechnen, ohne die Lösung des QMP bestimmen zu müssen. Als Grundlage dient dazu der folgende Satz:

Satz 6.3.1 *Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix. Es seien λ_i die Eigenwerte zu den Eigenvektoren \mathbf{c}_i von $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$. Dann sind für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ die \mathbf{c}_i auch Eigenvektoren der stets existierenden Matrix $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T$ mit den zugehörigen Eigenwerten*

$$\bar{\lambda}_i = \frac{1}{1 + \alpha \frac{1}{\lambda_i}}. \quad (6.188)$$

Bemerkung 1: Mit diesem Satz lässt sich der Rechenaufwand für die Berechnung von $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T$ für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dann deutlich reduzieren, wenn $n \ll m$ ist, da dann auch für die Dimensionen $\dim(\mathbf{A} \mathbf{A}^T) \ll \dim(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ gilt. Bei einer Objektbereichsgröße von $1000 \text{ mm} \times 400 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$ und einer Voxelgröße von $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ ergibt sich nach der Diskretisierung für m ein Wert von $1,6 \cdot 10^8$. Dies ist deutlich höher als die Zahl n der verwendeten Bildmomente, welche in dieser Arbeit zweistellig ist.

Bemerkung 2: Für reguläre Matrizen \mathbf{A} gilt:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} &= \mathbf{A}^{-T} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1} \\ &= \mathbf{A}^{-T} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} + \alpha \mathbf{A}^{-T} \mathbf{A}^{-1} \\ &= \mathbf{I} + \alpha (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T = (\mathbf{I} + \alpha(\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1})^{-1}. \quad (6.189)$$

Mit den üblichen Rechenregeln für Eigenwerte und Eigenvektoren ergeben sich dann die Aussagen des Satzes 6.3.1. Da die Eigenwerte eines Operators stetig von diesem abhängen [25, Seite 118], lässt sich die Berechnungsvorschrift für die Eigenwerte auch auf nichtreguläre Matrizen übertragen. Der folgende Beweis, der auch den praktisch benötigten Fall nichtregulärer Matrizen behandelt, geht allerdings direkt algebraisch vor und verzichtet auf das Stetigkeitsargument.

Beweis von Satz 6.3.1: $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ist nach Konstruktion positiv semidefinit. Damit ist $\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}$ positiv definit und demzufolge invertierbar. Also existiert $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T$.

Für die Matrix \mathbf{A} kann stets die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T$ mit den orthogonalen Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{V} durchgeführt werden [34]. Es gilt

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^T \quad (6.190)$$

und da \mathbf{V} orthogonal ist, folgt

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma}^2 \mathbf{U}^T. \quad (6.191)$$

Das bedeutet, dass die Matrix $\mathbf{\Sigma}^2$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte von $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ ist. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T &= \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T (\mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^T \\ &= \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T (\mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^2 \mathbf{V}^T + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^T \\ &= \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T (\mathbf{V} (\mathbf{\Sigma}^2 + \alpha \mathbf{I}) \mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^T \\ &= \mathbf{U} \mathbf{\Sigma}^2 (\mathbf{\Sigma}^2 + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{U}^T \\ &= \mathbf{U} (\mathbf{I} + \alpha \mathbf{\Sigma}^{-2})^{-1} \mathbf{U}^T. \end{aligned} \quad (6.192)$$

Aus den Gleichungen (6.191) und (6.192) folgt, dass die Eigenvektoren von $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ und $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T$ gleich sind und die Eigenwerte sich nach der in obigem Satz angegebenen Formel berechnen. \square

Indirekte Inkonsistenzanalyse

Bei der Berechnung von $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ tritt der Term

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2^T(\mathbf{T}) = \begin{pmatrix} \int_{\mathcal{K}} B_{(1),1}(\mathbf{x}) B_{(2),1}(\mathbf{T})(\mathbf{x}) d\mathbf{x} & \cdots & \int_{\mathcal{K}} B_{(1),1}(\mathbf{x}) B_{(2),N_2}(\mathbf{T})(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\mathcal{K}} B_{(1),N_1}(\mathbf{x}) B_{(2),1}(\mathbf{T})(\mathbf{x}) d\mathbf{x} & \cdots & \int_{\mathcal{K}} B_{(1),N_1}(\mathbf{x}) B_{(2),N_2}(\mathbf{T})(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{pmatrix} \quad (6.193)$$

auf, zu dessen Berechnung für jede Lageveränderung \mathbf{T} eine große Zahl von Integralen neu zu bestimmen ist.⁷

Diese Integrale müssen im Allgemeinen numerisch bestimmt werden. Um dieses Problem zu umgehen, wird die in Abbildung 6.13 dargestellte Vorgehensweise gewählt. Statt die Messwertsätze direkt mittels einer Inkonsistenzanalyse miteinander zu vergleichen, werden sie ähnlich wie in den vergangenen Kapiteln mit den Momenten des Objektes bis zu einer Ordnung k verglichen.

⁷Die Gleichung (6.193) ergibt sich, falls auf die eingangs erwähnte Diskretisierung in charakteristische Funktionen auf Voxeln verzichtet wird. Bei Verwendung der Diskretisierung sind die Integrale durch ihre numerischen Näherungen zu ersetzen.

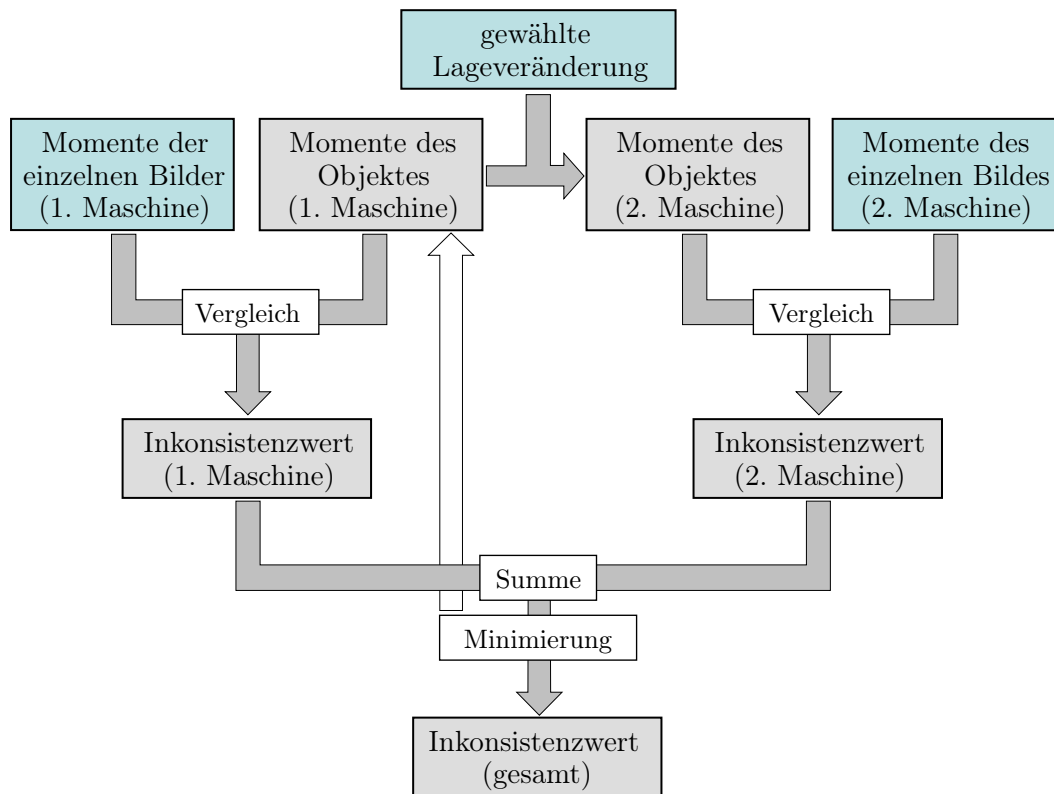


Abbildung 6.13.: Bestimmung der Iterationsgröße mittels indirekter Inkonsistenzanalyse: Eingangsgrößen sind blau dargestellt, Minimierung erfolgt durch Lösen einer Extremwertaufgabe mittels eines linearen Gleichungssystems

Die Momente des Objektes werden dabei als virtueller Messwertdatensatz betrachtet. Die Bildwichtungsfunktionen sollten dabei so gewählt werden, dass die zugehörigen Messwerte eine hohe Redundanz zu den Momenten des Objektes bis zur Ordnung k haben. Dies ist zum Beispiel für die Bildmomentenfunktionen ebenfalls bis zur Ordnung k der Fall.

Mit dem obigen Verfahren erhält man eine Formel für die Inkonsistenz der Momente der Bilder der ersten beziehungsweise des Bildes der zweiten Maschine mit den Momenten des Objektes. Zur Berücksichtigung der Lage muss nicht neu integriert werden, weil die Objektmomente durch lineare Transformationen in die Momente des Objektes bezüglich einer anderen Lage transformiert werden können (siehe Abschnitt 5.3).

Es werden nun mittels eines niedrigdimensionalen und mit geringem Rechenaufwand aufzustellenden QMPs die Momente des Objektes bestimmt, welche die kleinste Summe der Inkonsistenzwerte beim Vergleich mit den Momenten der Bilder der ersten und der zweiten Maschine haben. Die zugehörige Summe wird dann als Größe zur Beurteilung der Inkonsistenz der Momente der ersten und der zweiten Maschine betrachtet.

Aus demselben Grund, aus dem bei den Bildmomentenfunktionen zu zueinander orthogonalen Linearkombinationen von Bildmomentenfunktionen übergegangen wird, wird bei den Objektmomentenfunktionen zu zueinander orthogonalen Linearkombinationen von Objektmomentenfunktionen übergegangen.

Eine orthonormierte Basis des Raumes der Objektmomentenfunktionen bis zur Ordnung k sei in dem linearen Operator \mathbf{K} zusammengefasst. In \mathbf{m}_K seien die zu den Basisfunktionen gehörenden virtuellen Messwerte zusammengefasst.

Die Inkonsistenzanalyse führt auf das Minimierungsproblem

$$f_1(\mu) := \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{K}^T \\ \mathbf{B}_1^T \end{pmatrix} \mu - \begin{pmatrix} \mathbf{m}_K \\ \mathbf{m}_1 \end{pmatrix} \right\|^2 + \alpha \|\mu\|_{\mathcal{K}} \rightarrow \min_{\mu} \quad (6.194)$$

mit der Lösung $\mu_{opt} = \underset{\mu}{\operatorname{argmin}} (f_1(\mu))$.

Die Rechnung für die zweite Maschine ist analog zu der Rechnung für die erste Maschine. Hierbei werden statt eines körperfesten Koordinatensystems maschinenfeste Koordinatensysteme verwendet. Dadurch wird für die Rechnung statt $\mathbf{B}_2(\mathbf{T})$ nur $\mathbf{B}_2(\mathbf{I})$, nachfolgend verkürzt zu \mathbf{B}_2 , benötigt. Die Momente müssen zwischen den maschinenfesten Koordinatensystemen der ersten und der zweiten Maschine transformiert werden. Statt \mathbf{m}_K ist daher bei der zweiten Maschine der Ausdruck $\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{m}_K$ zu verwenden. Die Momententransformationsmatrix $\tilde{\mathbf{T}}$ ergibt sich dabei aus der Lageveränderung \mathbf{T} mittels Gleichung (5.96). Es ergibt sich

$$\mu_{opt} = \underset{\mu}{\operatorname{argmin}} \left(\left\| \begin{pmatrix} \mathbf{K}^T \\ \mathbf{B}_2^T \end{pmatrix} \mu - \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{m}_K \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} \right\|^2 + \alpha \|\mu\|_{\mathcal{K}} \right). \quad (6.195)$$

Für die erste Maschine berechnet sich der zu μ_{opt} gehörende Approximationsfehler $I_1 = f_1(\mu_{opt})$ analog zu Gleichung (6.185) aus seiner quadratischen Form zu

$$I_1 = (\mathbf{m}_K^T, \mathbf{m}_1^T) \mathbf{L} \begin{pmatrix} \mathbf{m}_K \\ \mathbf{m}_1 \end{pmatrix}. \quad (6.196)$$

und für die zweite Maschine entsprechend zu

$$I_2 = (\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{m}_K^T, \mathbf{m}_2^T) \mathbf{J} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{m}_K \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} \quad (6.197)$$

Durch Aufteilen von \mathbf{L} und \mathbf{J} in Blockmatrizen gemäß

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} \\ \mathbf{L}_{12}^T & \mathbf{L}_{22} \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{12}^T & \mathbf{J}_{22} \end{pmatrix} \quad (6.198)$$

ergibt sich für die Summe $I_G = I_1 + I_2$ der Inkonsistenzwerte

$$I_G = \mathbf{m}_K^T (\mathbf{L}_{11} + \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{J}_{11} \tilde{\mathbf{T}}) \mathbf{m}_K + 2\mathbf{m}_K^T (\mathbf{L}_{12}\mathbf{m}_1 + \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{J}_{12}\mathbf{m}_2) + \mathbf{m}_1^T \mathbf{L}_{22}\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2^T \mathbf{J}_{22}\mathbf{m}_2. \quad (6.199)$$

Bei der allgemeinen Betrachtung von QMPen gilt, dass für Matrizen \mathbf{A} und Vektoren \mathbf{b} die Lösung des Minimierungsproblems

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} \rightarrow \min_{\mathbf{x}} \quad (6.200)$$

der Vektor $\mathbf{x}_{opt} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ ist [19]. Durch das Ersetzen von $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T \mathbf{b}$ und \mathbf{x} durch die symmetrische Matrix $\mathbf{L}_{11} + \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{J}_{11} \tilde{\mathbf{T}}$, den Vektor $\mathbf{L}_{12}\mathbf{m}_1 + \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{J}_{12}\mathbf{m}_2$ und den Vektor \mathbf{m}_K ergibt sich für die Minimierung von I_G die Lösung

$$\mathbf{m}_K = - \left(\mathbf{L}_{11} + \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{J}_{11} \tilde{\mathbf{T}} \right)^{-1} \left(\mathbf{L}_{12}\mathbf{m}_1 + \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{J}_{12}\mathbf{m}_2 \right). \quad (6.201)$$

Mit den Gleichungen (6.199) und (6.201) lässt sich also der Inkonsistenzwert I_G aus den Momenten \mathbf{m}_1 , \mathbf{m}_2 der Bilder der ersten und der zweiten Maschine berechnen. Zur Positionswiederfindung ist noch die durch $\tilde{\mathbf{T}}$ beschriebene Lageveränderung, bei welcher I_G minimal wird, zu bestimmen.

Interpretation als Vergleich von Momenten

Die Inkonsistenzanalyse wird nachfolgend im Sinne des in Abschnitt 6.2.3 (Gleichung (6.173)) dargestellten Ansatzes interpretiert. Der Inkonsistenzwert I_1 aus Gleichung (6.196) lässt sich mit der Diagonalisierung $\mathbf{L} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}_L\mathbf{C}^T$ zu

$$I_1 = (\mathbf{m}_K^T, \mathbf{m}_1^T) \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}_L\mathbf{C}^T \begin{pmatrix} \mathbf{m}_K \\ \mathbf{m}_1 \end{pmatrix} \quad (6.202)$$

und weiter zu

$$I_1 = \sum_i \lambda_{(L),i} \left(\mathbf{c}_{(K),i}^T \mathbf{m}_K - \mathbf{c}_{(1),i}^T \mathbf{m}_1 \right)^2 \quad (6.203)$$

umformen, wobei $\begin{pmatrix} \mathbf{c}_{(K),i} \\ -\mathbf{c}_{(1),i} \end{pmatrix}$ der Eigenvektor zum i -ten Eigenwert $\lambda_{(L),i}$ von \mathbf{L} und damit der i -te Spaltenvektor von \mathbf{C} ist. Die Untersuchung des Eigensystems von \mathbf{L} wird mit Satz 6.3.1 auf die Untersuchung des Eigensystems der Matrix $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^T$ mit

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^T \\ \mathbf{B}_1^T \end{pmatrix} \quad (6.204)$$

zurückgeführt. Die Eigenwerte $\lambda_{(L),i}$ berechnen sich infolge des Satzes 6.3.1 aus den Eigenwerten $\lambda_{(1),i}$ von $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^T$ zu

$$\lambda_{(L),i} = \left(1 - \frac{1}{1 + \alpha \frac{1}{\lambda_{(1),i}}} \right)^2. \quad (6.205)$$

Es gilt

$$1 - \frac{1}{1 + \alpha \frac{1}{\lambda_{(1),i}}} = \frac{1 + \alpha \frac{1}{\lambda_{(1),i}} - 1}{1 + \alpha \frac{1}{\lambda_{(1),i}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha} \lambda_{(1),i}}. \quad (6.206)$$

Daraus folgt mit Gleichung (6.205)

$$\lambda_{(L),i} = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha} \lambda_{(1),i}} \right)^2. \quad (6.207)$$

Die Eigenvektoren der Matrizen \mathbf{L} entsprechen auf Grund von Satz 6.3.1 den Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^T$. Es gilt

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^T = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^T \\ \mathbf{B}_1^T \end{pmatrix} (\mathbf{K} \ \mathbf{B}_1). \quad (6.208)$$

Der Eigenvektor $\begin{pmatrix} \mathbf{c}_{(K),1} \\ -\mathbf{c}_{(1),1} \end{pmatrix}$ zum kleinsten Eigenwert von $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^T$ ist Lösung des Minimierungsproblems

$$\frac{\left\| (\mathbf{K} \ \mathbf{B}_1) \begin{pmatrix} \mathbf{c}_K \\ -\mathbf{c}_1 \end{pmatrix} \right\|^2}{\left\| \begin{pmatrix} \mathbf{c}_K \\ -\mathbf{c}_1 \end{pmatrix} \right\|^2} = \frac{\|\mathbf{K}\mathbf{c}_K - \mathbf{B}_1\mathbf{c}_1\|^2}{\|\mathbf{c}_K\|^2 + \|\mathbf{c}_1\|^2} \rightarrow \min_{\mathbf{c}_K, \mathbf{c}_1}. \quad (6.209)$$

Das heißt, dass $\mathbf{K}\mathbf{c}_K$ und $\mathbf{B}_1\mathbf{c}_1$ die „gegenseitig besten Näherungen“ sind. Die Näherung ist umso besser, je kleiner der Eigenwert ist. Die anderen Eigenvektoren legen weitere gegenseitige Näherungen fest. Die Güte dieser Näherungen wird durch die zugehörigen Eigenwerte von $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^T$ beschrieben.

Die gleichen Betrachtungen lassen sich für die zweite Maschine anstellen.

Bemerkung: Die Minimierung von $\frac{\|\mathbf{K}\mathbf{c}_K - \mathbf{B}_1\mathbf{c}_1\|^2}{\|\mathbf{c}_K\|^2}$ führt zur am besten näherbaren Funktion $\mathbf{K}\mathbf{c}_K$ und ihrer Quadratmittelnäherung $\mathbf{B}_1\mathbf{c}_1$. Mit den vorangegangenen Betrachtungen ist die Gleichung (6.203) für den Inkonsistenzwert der ersten Maschine und auch die entsprechende Formel für die zweite Maschine im Sinne des Ansatzes aus Gleichung (6.173) interpretiert. Dabei ergeben sich aus den Eigenvektoren die Linearkombinationen. Die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_{(\mathbf{L}),i}$ sind die Werte für die Wichtungsfaktoren d_i .

Bemerkungen zur Anwendung

Da die Objektmomente mit ihren Näherungen verglichen werden, liegt es nahe, als Ansatzraum für die Bildwichtungsfunktionen nicht den Raum der Bildmomentenfunktionen, sondern den Raum der in Abschnitt 6.2.3 bestimmten Näherungen der Objektmomentenfunktionen zu benutzen.

Um die verwendete Form der Inkonsistenzanalyse genau festzulegen, lässt sich wie folgt vorgehen: Es wird eine Ordnung k für die verwendeten Objektmomentenfunktionen gewählt. Aus dem Raum der Näherungen für diese Objektmomentenfunktionen ergeben sich die Bildwichtungsfunktionen der zu verwendenden Messwerte.

Bei der Wahl von k ist zu berücksichtigen: Ein höherer Wert von k erhöht die Anzahl der Messwerte und damit die Wahrscheinlichkeit, dass beim Test von nicht korrekten Lageveränderungen Inkonsistenzen gefunden werden. Ein höheres k führt deshalb zu einem Verfahren, welches

- mit höherer Wahrscheinlichkeit eindeutige und genaue Ergebnisse liefert und
- einen signifikant höheren Rechenaufwand aufgrund der höheren Anzahl von Messwerten zur Folge hat.

Es muss also bei der Wahl von k zwischen Genauigkeit und Rechenaufwand abgewogen werden. Ein geeigneter Wert für k kann durch Tests mit einer großen Zahl von Beispielen ermittelt werden. Falls in einem konkreten Fall festgestellt wird, dass die Lage mit dem gewählten k nicht eindeutig bestimmt werden kann, lässt sich k entsprechend erhöhen bis eine eindeutige Lagebestimmung erreicht wird. Diese Feststellung lässt sich durch eine Analyse des lokalen Verhaltens der Iterationsgröße erreichen.

Die in den Abschnitten 6.2.1 bis 6.2.3 vorgestellten Verfahren sind nicht darauf beschränkt, dass für die Positionswiederfindung in der Maschine der zweiten Stufe nur ein Projektionsbild vorhanden ist. Die Gleichungen lassen sich direkt auf den Fall von mehreren Projektionsbildern übertragen.

Das hier zur Positionswiederfindung eingesetzte Verfahren der Inkonsistenzanalyse lässt sich auch in einer allgemeineren Situation anwenden: Es ist ein Messwertdatensatz gegeben und es ist eine Theorie bekannt mit der zu jedem physikalischen Objekt die Messwerte mittels linearer Gleichungen vorhersagt werden. Des Weiteren ist jedem Objekt ein Plausibilitätswert mittels eines positiv definiten quadratischen Funktionals zugeordnet, welcher umso kleiner ist, je plausibler das Objekt ist. Ziel ist es, eine einfache Beschreibung der Aspekte des Objektes (Modell des Objektes) zu finden, aus welchen sich die Messwerte vorhersagen lassen. Mittels Inkonsistenzanalyse ist es möglich, zu jedem Paar, bestehend aus Messwertdatensatz und Modell, einen Wert anzugeben, der umso kleiner ist, je besser diese zueinander passen. Damit lässt sich also die Qualität

verschiedener Modelle vergleichen und mittels eines Iterationsverfahrens aus einer vorgegebenen Menge von Modellen das beste Modell ermitteln.

6.4. Startwertbestimmung

Um eine einfache Methode zur Bestimmung eines Startwertes für das Iterationsverfahren zur Positionswiederfindung zu finden, werden die folgenden Annahmen getroffen:

- Die Momente des Objektes bis zur zweiten Ordnung lassen sich ausreichend genau aus den Momenten der Bilder der ersten Maschine bestimmen. Diese Annahme beruht auf den an einigen Beispielen gemachten Erfahrungen.
- Das Bild der zweiten Maschine entsteht entsprechend einer Parallelprojektion. Dies ist eine stark vereinfachende Annahme.

Diese Annahmen ermöglichen es, die Positionswiederfindung auf den Fall der Parallelstrahlgeometrie zurückzuführen. Im Folgenden wird untersucht, ob für diesen Fall eine analytische Lösung existiert. In Abschnitt 6.1 war dies bereits für zweidimensionale Objekte und eindimensionale Bilder gelungen. Um den Einfluss von Vergrößerungseffekten (Abbildung 5.5) zu minimieren, werden alle Momente des Objektes durch das nullte Moment des Objektes und alle Momente des Bildes der zweiten Maschine durch das nullte Moment des Bildes der zweiten Maschine dividiert.

Die Positionswiederfindung besteht in diesem Fall darin, die Basisquelle $\tilde{\mathbf{q}}$ sowie die zwei orthonormierten Basisvektoren \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 der Detektorebene zu bestimmen, zu denen die Parametrisierung des Projektionsbildes passt. Die Bestimmung der Basisquelle $\tilde{\mathbf{q}}$ erfolgt analog zum Fall zweidimensionaler Objekte und eindimensionaler Projektionsbilder. Das Bild wird so parametrisiert, dass der Schwerpunkt im Koordinatenursprung und die Detektorebene \mathcal{D} orthogonal zur Projektionsrichtung \mathbf{v} ist. Anschließend wird die Basisquelle $\tilde{\mathbf{q}}$ in den Schwerpunkt des Objektes gelegt, so dass unabhängig von der Wahl von \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 die Schwerpunkte aufeinander abgebildet werden. Im Folgenden werden

- die Projektionsrichtung \mathbf{v} und anschließend
- die Parametrisierung der Detektorebene, beschrieben durch \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 ,

bestimmt.

Berechnung der Projektionsrichtung

Es sei \mathbf{M} die Matrix der Objektmomente zweiter Ordnung um den Schwerpunkt und \mathbf{N} die Matrix der Bildmomente zweiter Ordnung um den Schwerpunkt. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} - & \mathbf{a}_1^T & - \\ - & \mathbf{a}_2^T & - \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \mathbf{N} \quad (6.210)$$

wegen Gleichung (5.37). Die Matrix \mathbf{M} beschreibt das dreidimensionale Momentenellipsoid \mathcal{V}_M , die Matrix \mathbf{N} die Momentenellipse \mathcal{V}_N . Es sei \mathcal{D}_0 die zur Detektorebene parallele Ebene durch den Koordinatenursprung. Durch Projektion des Ellipsoids \mathcal{V}_M auf \mathcal{D}_0 erhält man ein zu einer Fläche entartetes Ellipsoid \mathcal{V}_{M^*} (Abbildung 6.14). Dieses entartete Ellipsoid wird durch die Matrix

$$\mathbf{M}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{M}(\mathbf{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}^T) \quad (6.211)$$

beschrieben.

Mit $\hat{\mathcal{V}}_{M^*}$ wird die zur Ellipsenfläche \mathcal{V}_{M^*} gehörende Ellipse bezeichnet. Ihr Bild ist \mathcal{V}_N . Die Ellipsen \mathcal{V}_N und $\hat{\mathcal{V}}_{M^*}$ sind kongruent. Somit sind die beiden Hauptachsenhalbmesser von \mathcal{V}_N

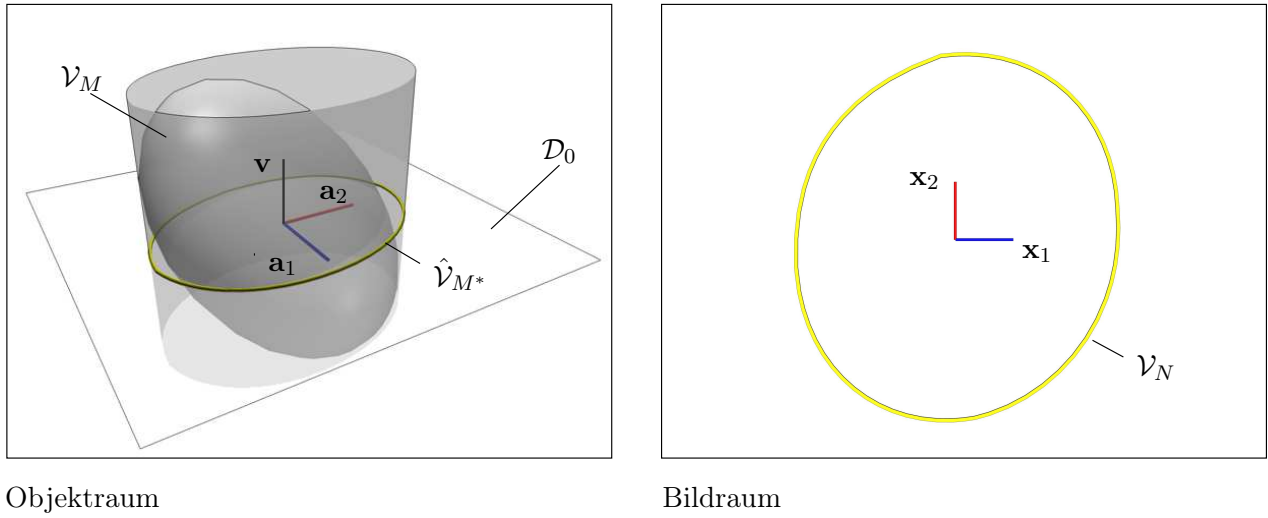


Abbildung 6.14.: Darstellung von \mathcal{V}_M , $\hat{\mathcal{V}}_{M^*}$ und \mathcal{V}_N

gleich den Hauptachsenhalbmessern des Ellipsoids \mathcal{V}_{M^*} . Zusätzlich hat \mathcal{V}_{M^*} den Hauptachsenhalbmesser 0. Da außerdem die Eigenwerte von \mathbf{M}^* den Hauptachsenhalbmessern des entarteten Ellipsoids \mathcal{V}_{M^*} und die Eigenwerte von \mathbf{N} denen der Ellipse \mathbf{N} entsprechen, gilt

$$\chi_{\mathbf{M}^*}(\lambda) = \lambda \chi_{\mathbf{N}}(\lambda) \quad (6.212)$$

für die charakteristischen Polynome $\chi_{\mathbf{M}^*}$ und $\chi_{\mathbf{N}}$ der Matrizen \mathbf{M}^* und \mathbf{N} .

Die Matrix

$$\mathbf{M}^{**} = \mathbf{M}(\mathbf{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}^T) \quad (6.213)$$

ist zu \mathbf{M}^* , wie die nachfolgende Betrachtung zeigt, ähnlich. Für jedes $\alpha \neq 1$ ist die Matrix $(\mathbf{I} - \alpha\mathbf{v}\mathbf{v}^T)$ invertierbar. Deshalb gilt, dass

$$\mathbf{M}_{\alpha}^* = (\mathbf{I} - \alpha\mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{M}(\mathbf{I} - \alpha\mathbf{v}\mathbf{v}^T)$$

ähnlich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\alpha}^{**} &= (\mathbf{I} - \alpha\mathbf{v}\mathbf{v}^T)^{-1}\mathbf{M}_{\alpha}^*(\mathbf{I} - \alpha\mathbf{v}\mathbf{v}^T) \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{I} - \alpha\mathbf{v}\mathbf{v}^T)(\mathbf{I} - \alpha\mathbf{v}\mathbf{v}^T) \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{I} + (-2\alpha + \alpha^2)\mathbf{v}\mathbf{v}^T) \end{aligned}$$

ist. Die Matrizen \mathbf{M}_{α}^* und \mathbf{M}_{α}^{**} sind insbesondere auch für $\alpha \rightarrow 1$ ähnlich. Damit sind ihre charakteristischen Polynome gleich. Da die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms einer Matrix stetig von dieser abhängen, sind die charakteristischen Polynome von \mathbf{M}_{α}^* und \mathbf{M}_{α}^{**} auch für $\alpha = 1$ gleich und die Matrizen $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}_1^*$ und $\mathbf{M}^{**} = \mathbf{M}_1^{**}$ sind demzufolge ähnlich.

Um die nachfolgenden Berechnungen zu vereinfachen, wird zu einem durch die Achsen des Ellipsoids gebildeten Koordinatensystem übergegangen. Der Übergang wird durch die Diagonalisierung $\mathbf{M} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T$ mit der Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ und der orthogonalen Matrix \mathbf{Q} beschrieben. Da eine symmetrische Matrix stets eine Basis zueinander orthogonaler Eigenvektoren besitzt, lässt sich eine solche Diagonalisierung stets durchführen.

Die Matrix \mathbf{M}^{**} hat dann die Form

$$\mathbf{M}^{**} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T(\mathbf{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}^T) \quad (6.214)$$

und ist ähnlich zu

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}^{**} &= \mathbf{A}\mathbf{Q}^T(\mathbf{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}^T)\mathbf{Q} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{v}}^T) \end{aligned} \quad (6.215)$$

mit $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}^T\mathbf{v}$. Aus Gleichung (6.212) und der Ähnlichkeit der Matrizen \mathbf{M}^* und $\bar{\mathbf{M}}^{**}$ folgen für die Koeffizienten⁸ der charakteristischen Polynome

$$\begin{aligned} \chi_{\bar{\mathbf{M}}^{**}}(\lambda) &= \lambda^3 - \text{spur}(\bar{\mathbf{M}}^{**})\lambda^2 + \text{Inv2}(\bar{\mathbf{M}}^{**})\lambda - \det(\bar{\mathbf{M}}^{**}), \\ \chi_{\mathbf{N}}(\lambda) &= \lambda^2 - \text{spur}(\mathbf{N})\lambda + \det \mathbf{N}, \end{aligned}$$

durch Koeffizientenvergleich die Beziehungen

$$\text{spur}(\bar{\mathbf{M}}^{**}) = \text{spur}(\mathbf{N}), \quad (6.216)$$

$$\text{Inv2}(\bar{\mathbf{M}}^{**}) = \det(\mathbf{N}). \quad (6.217)$$

Für eine allgemeine dreidimensionale Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

haben die in den Gleichungen (6.216) und (6.217) benötigten Invarianten die Form

$$\begin{aligned} \text{spur}(\mathbf{A}) &= a_{11} + a_{22} + a_{33}, \\ \text{Inv2}(\mathbf{A}) &= a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Mit den Komponenten⁹

$$\bar{M}_{ij}^{**} = \Lambda_i \delta_{ij} - \Lambda_i \bar{v}_i \bar{v}_j, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

der Matrix $\bar{\mathbf{M}}^{**}$ wird damit aus Gleichung (6.216)

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 - \Lambda_1 \bar{v}_1^2 - \Lambda_2 \bar{v}_2^2 - \Lambda_3 \bar{v}_3^2 = \text{spur}(\mathbf{N}). \quad (6.218)$$

Die Invariante $\text{Inv2}(\bar{\mathbf{M}}^{**})$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \text{Inv2}(\bar{\mathbf{M}}^{**}) &= (\Lambda_1 - \Lambda_1 \bar{v}_1^2)(\Lambda_2 - \Lambda_2 \bar{v}_2^2) + (\Lambda_1 - \Lambda_1 \bar{v}_1^2)(\Lambda_3 - \Lambda_3 \bar{v}_3^2) + \\ &\quad (\Lambda_2 - \Lambda_2 \bar{v}_2^2)(\Lambda_3 - \Lambda_3 \bar{v}_3^2) - \Lambda_1 \bar{v}_1 \bar{v}_3 \Lambda_3 \bar{v}_3 \bar{v}_1 - \\ &\quad \Lambda_2 \bar{v}_2 \bar{v}_3 \Lambda_3 \bar{v}_3 \bar{v}_2 - \Lambda_1 \bar{v}_1 \bar{v}_2 \Lambda_2 \bar{v}_2 \bar{v}_1. \end{aligned}$$

Mit der Nebenrechnung

$$\begin{aligned} &(\Lambda_1 - \Lambda_1 \bar{v}_1^2)(\Lambda_2 - \Lambda_2 \bar{v}_2^2) - \Lambda_1 \bar{v}_1 \bar{v}_2 \Lambda_2 \bar{v}_2 \bar{v}_1 = \\ &= \Lambda_1 \Lambda_2 - \Lambda_1 \Lambda_2 (\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2) + \Lambda_1 \Lambda_2 \bar{v}_1^2 \bar{v}_2^2 - \Lambda_1 \Lambda_2 \bar{v}_1^2 \bar{v}_2^2 \\ &= \Lambda_1 \Lambda_2 - \Lambda_1 \Lambda_2 \bar{v}_1^2 - \Lambda_1 \Lambda_2 \bar{v}_2^2 \end{aligned}$$

⁸Mit $\text{Inv2}(\mathbf{A})$ wird der lineare Koeffizient des charakteristischen Polynoms von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ bezeichnet.

⁹ $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)^T$, $\mathbf{A} = \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$

und analogen Rechnungen für die übrigen Terme wird daraus

$$\begin{aligned} \text{Inv2}(\bar{\mathbf{M}}^{**}) = & \Lambda_1\Lambda_2 - \Lambda_1\Lambda_2\bar{v}_1^2 - \Lambda_1\Lambda_2\bar{v}_2^2 + \Lambda_1\Lambda_3 - \Lambda_1\Lambda_3\bar{v}_1^2 - \Lambda_1\Lambda_3\bar{v}_3^2 + \\ & \Lambda_2\Lambda_3 - \Lambda_2\Lambda_3\bar{v}_2^2 - \Lambda_2\Lambda_3\bar{v}_3^2. \end{aligned} \quad (6.219)$$

Mit Gleichung (6.217) folgt daraus

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{N}) = & \Lambda_1\Lambda_2 + \Lambda_1\Lambda_3 + \Lambda_2\Lambda_3 - \bar{v}_1^2(\Lambda_1\Lambda_2 + \Lambda_1\Lambda_3) - \bar{v}_2^2(\Lambda_2\Lambda_1 + \Lambda_2\Lambda_3) - \\ & \bar{v}_3^2(\Lambda_3\Lambda_1 + \Lambda_3\Lambda_2). \end{aligned} \quad (6.220)$$

Die Gleichungen (6.218) und (6.220) bilden zusammen mit der Normierung

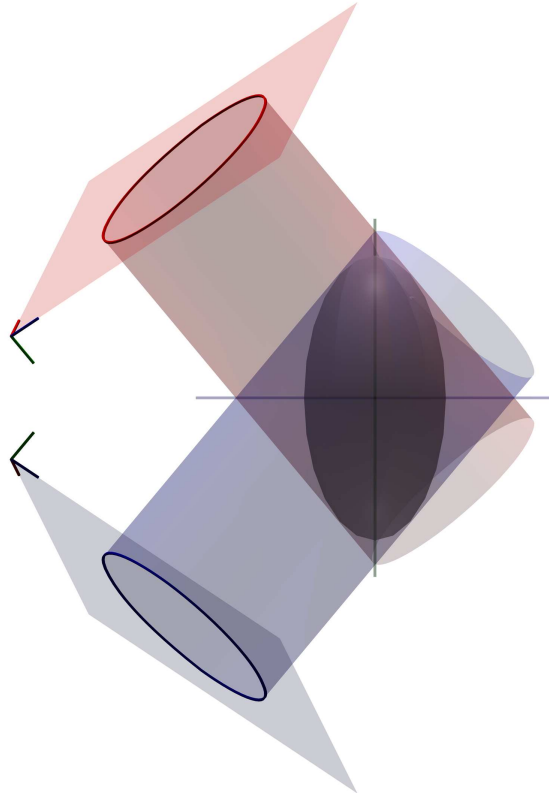


Abbildung 6.15.: Spiegelung der Aufnahmegeometrie an einer Symmetrieebene des Momentenellipsoides

$$\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2 = 1 \quad (6.221)$$

ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von \bar{v}_1^2 , \bar{v}_2^2 und \bar{v}_3^2 . Die sich daraus ergebenden acht Lösungen für $\bar{\mathbf{v}}$ spiegeln die Symmetrie des Problems wider: Das Projektionsbild¹⁰ eines Ellipsoids ändert sich nicht, wenn alle die Projektion beschreibenden Größen und somit auch $\bar{\mathbf{v}}$ an einer Symmetrieebene des Ellipsoids gespiegelt werden (Abbildung 6.15). Jeweils zwei dieser Lösungen sind im Prinzip gleich, weil sie zueinander parallele gegenläufige Projektionsrichtungen darstellen. Es bleiben also vier im Prinzip verschiedene Lösungen für $\bar{\mathbf{v}}$. Aus $\bar{\mathbf{v}}$ lässt sich mittels $\mathbf{v} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{v}}$ die Projektionsrichtung \mathbf{v} ermitteln.

¹⁰Damit ist das Abbild des Ellipsoids im Bildraum gemeint. Das Abbild auf der Detektorebene erscheint gespiegelt.

Berechnung der Parametrisierung der Detektorebene

Es werden zwei orthonormierte zu \mathbf{v} orthogonale Vektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 gewählt. Somit sind sie Basisvektoren der Detektorebene. Es gilt für die gesuchten ebenfalls orthonormierten Basisvektoren \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 die Beziehung

$$\begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (6.222)$$

mit $\alpha \in [0, 2\pi)$. Damit wird aus Gleichung (6.210)

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} - & \mathbf{e}_1^T & - \\ - & \mathbf{e}_2^T & - \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \\ | & | \end{pmatrix}}_{:= \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{N}. \quad (6.223)$$

Daraus folgt

$$N_{11} = H_{11} \cos^2 \alpha + 2H_{12} \sin \alpha \cos \alpha + H_{22} \sin^2 \alpha, \quad (6.224)$$

$$N_{12} = (H_{22} - H_{11}) \sin \alpha \cos \alpha + H_{12} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \quad (6.225)$$

$$N_{22} = H_{11} \sin^2 \alpha - 2H_{12} \sin \alpha \cos \alpha + H_{22} \cos^2 \alpha. \quad (6.226)$$

Dies ergibt mit den trigonometrischen Beziehungen (6.15), (6.16) und (6.17) schließlich das lineare Gleichungssystem

$$N_{11} - \frac{1}{2}(H_{11} + H_{22}) = \frac{1}{2}(H_{11} - H_{22}) \cos(2\alpha) + H_{12} \sin(2\alpha) \quad (6.227)$$

$$N_{12} = H_{12} \cos(2\alpha) + \frac{1}{2}(H_{22} - H_{11}) \sin(2\alpha) \quad (6.228)$$

$$N_{22} - \frac{1}{2}(H_{11} + H_{22}) = \frac{1}{2}(H_{22} - H_{11}) \cos(2\alpha) - H_{12} \sin(2\alpha) \quad (6.229)$$

zur Bestimmung der Werte von $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$. Damit ist auch der Wert von 2α eindeutig bestimmt. Da zu jeder Lösung α auch $\alpha + \pi$ eine Lösung ist, verdoppelt sich die Anzahl der prinzipiell verschiedenen Lösungen wieder auf acht.

Sind in der Maschine der zweiten Stufe mehrere Projektionsbilder vorhanden, werden Näherungen der Momente des Objektes bis zur zweiten Ordnung aus den Momenten dieser Projektionsbilder berechnet. Das damit bestimmte Momentenellipsoid $\mathcal{V}_{M_{Approx}}$ lässt sich dann in Richtung eines der Projektionsbilder projizieren. Die so erhaltene Momentenellipse $\mathcal{V}_{N_{Approx}}$ ist eine bessere Näherung für die Parallelprojektion des Momentenellipsoides in der Lage der zweiten Maschine als die aus einem Projektionsbild erhaltene Momentenellipse \mathcal{V}_N . Sie sollte deshalb anstelle von \mathcal{V}_N verwendet werden. Die Berechnung der sich durch Parallelprojektion aus einem Momentenellipsoid ergebenden Momentenellipse ist am Ende von Abschnitt 5.1 dargestellt.

7. Anwendung des Algorithmus auf simulierte Beispiele - Analyse von Genauigkeit und Zuverlässigkeit

Die entwickelten Verfahren zur Positionswiederfindung wurden mittels simulierter, mit dem Programm aRTist [26] erstellter Beispiele getestet.

Simulierte Beispiele haben gegenüber praktischen Beispielen den Vorteil, dass die Lageveränderung zwischen den beiden Maschinen genau bekannt ist und demnach Aussagen über die Genauigkeit des Verfahrens getroffen werden können. Weiterhin lassen sich an simulierten Beispielen die Einflüsse verschiedener Effekte, wie Rauschen oder fehlerhafte Materialkalibrierung, untersuchen. Für die Simulationen wurde die Geometrie einer Röntgendurchstrahlungsmaschine (EDtS) verwendet. Simuliert wurden die Werte der Linienintegrale der Schwächungskoeffizientenverteilung entlang der Röntgenstrahlen.

Zunächst wurden Tests mit einfachen aus Quadern und Kugeln zusammengesetzten Objekten durchgeführt (Abbildungen 7.1 und 7.2). Dies hat den Vorteil, dass die Momente des jeweiligen Objektes genau bekannt sind. Anschließend wurde das Verfahren mit gepäckstückähnlichen Objekten getestet. Dabei wurden für fünf verschiedene Lagen Durchstrahlungsbilder simuliert.

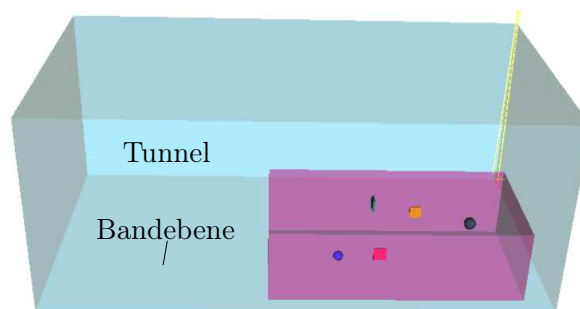


Abbildung 7.1.: Simulierte Testszene (Beispiel 1)

Jeweils eine dieser Lagen wurde als die Lage des Objektes in der Maschine der ersten Stufe und eine als Lage in der Maschine der zweiten Stufe aufgefasst. Demzufolge wurden Positionswiederfindungen für fünf mal fünf Lageveränderungen durchgeführt. Dabei wurde die Positionswiederfindung auch für den Fall untersucht, bei dem in der zweiten Maschine nicht nur ein, sondern zwei Projektionsbilder aufgenommen werden. Die Ergebnisse werden im Folgenden anhand einiger ausgewählter Beispiele dargestellt.

Es werden sowohl die Ergebnisse der Positionswiederfindung als auch die Ergebnisse von Teilproblemen dargestellt und diskutiert. Zu diesen Teilproblemen gehören die Berechnung der Momente des Objektes, die Vorhersage der Momente der zweiten Maschine und die Bestimmung einer geeigneten Iterationsgröße.

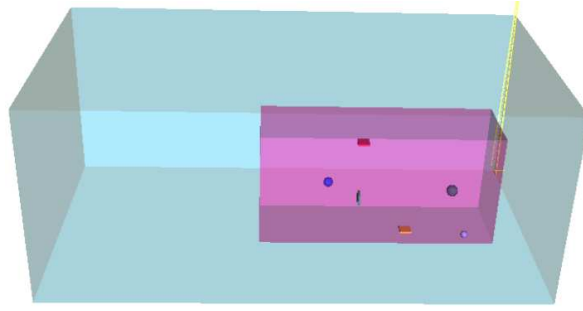


Abbildung 7.2.: Simulierte Testszene (Beispiel 2)

7.1. Testobjekte mit bekannten Momenten

Im Folgenden wird die Positionswiederfindung für den Fall untersucht, dass die Abbildung 7.1 die Lage eines Objektes in der Maschine der ersten Stufe und die Abbildung 7.2 die Lage desselben Objektes in der Maschine der zweiten Stufe zeigt. Es wird ein Koordinatensystem verwendet, dessen Koordinatenachsen parallel zu den Tunnelkanten sind. Dabei liegt

- die x_1 -Achse parallel zur Bandebene und orthogonal zur Bandrichtung,
- die x_2 -Achse orthogonal zur Bandebene und
- die x_3 -Achse in Bandrichtung.

Der Koordinatenursprung befindet sich in der hinteren rechten Ecke des Tunnels in Abbildung 7.1.

Im ersten Schritt wurden die Momente $M[f]$ des Objektes bis zur vierten Ordnung und ihre Näherungen $M_{naeh}[f]$ aus den Momenten der zu den obigen Lagen simulierten Bilder berechnet. Der Vergleich der Momente und ihrer Näherungen ist in Tabelle 7.1 enthalten. Er ergab einen relativen Fehler von maximal 3 %. Momente mit höherer Ordnung haben im Allgemeinen einen höheren Näherungsfehler als Momente mit niedrigerer Ordnung. Dabei haben insbesondere die Ordnungen bezüglich x_1 und x_2 großen Einfluss. Aus diesen Momenten können unter Vorgabe einer Lageveränderung die Momente des Bildes der Maschine der zweiten Stufe berechnet werden.

In Tabelle 7.2 sind Momente des Bildes der zweiten Maschine und die vorhergesagten Momente für die exakte Lageveränderung sowie für Lageveränderungen, die in Bezug auf die exakte Lageveränderung um 10 mm in Richtung der Koordinatenachsen verschoben beziehungsweise um 5° um die Koordinatenachsen um den Schwerpunkt des Objektes verdreht sind, angegeben. Es wurden nur positive Änderungen (+10 mm, $+5^\circ$) berücksichtigt¹. Die relativen Abweichungen $M_{naeh}[f]/M[f] - 1$ der vorhergesagten Momente von den tatsächlichen Momenten sind in Tabelle 7.3 dargestellt. Es lässt sich erkennen, dass für die nicht exakten Lageveränderungen zumeist größere Abweichungen als für die exakte Lageveränderung auftreten.

Bemerkung: Um eine geeignete Iterationsgröße zu bestimmen, werden die einzelnen Abweichungen zu einer einzelnen Größe mittels gewichteter Quadratsummenbildung zusammengefasst. Zur Bestimmung geeigneter Wichtungsfaktoren wird das in Abschnitt 6.3 entwickelte Verfahren der Inkonsistenzanalyse eingesetzt. Bei der Inkonsistenzanalyse werden allerdings die Momente der zweiten Maschine nicht explizit vorhergesagt.

¹Negative Änderungen ergeben aufgrund der Kleinheit der Änderungen und der Glattheit der Momente als Funktion der Lageveränderung annähernd betragsgleiche Abweichungen mit anderem Vorzeichen.

$f(x_1, x_2, x_3)$	$M[f]$	$M_{naeh}[f]$	$M_{naeh}[f]/M[f] - 1$
1	1.8810 10 ⁰⁵	1.8806 10 ⁰⁵	-0.0002
x_1	1.3328 10 ⁰⁸	1.3317 10 ⁰⁸	-0.0007
x_2	2.9092 10 ⁰⁷	2.8984 10 ⁰⁷	-0.0037
x_1^2	9.7267 10 ¹⁰	9.7135 10 ¹⁰	-0.0013
$x_1 x_2$	2.0664 10 ¹⁰	2.0550 10 ¹⁰	-0.0055
x_2^2	4.9805 10 ⁰⁹	4.9334 10 ⁰⁹	-0.0094
x_1^3	7.3044 10 ¹³	7.2890 10 ¹³	-0.0021
$x_1^2 x_2$	1.5089 10 ¹³	1.4972 10 ¹³	-0.0078
$x_1 x_2^2$	3.5390 10 ¹²	3.4971 10 ¹²	-0.0118
x_2^3	9.1099 10 ¹¹	9.0397 10 ¹¹	-0.0077
x_1^4	5.6361 10 ¹⁶	5.6184 10 ¹⁶	-0.0031
$x_1^3 x_2$	1.1332 10 ¹⁶	1.1208 10 ¹⁶	-0.0108
$x_1^2 x_2^2$	2.5804 10 ¹⁵	2.5417 10 ¹⁵	-0.0149
$x_1 x_2^3$	6.4563 10 ¹⁴	6.4002 10 ¹⁴	-0.0086
x_2^4	1.7400 10 ¹⁴	1.7485 10 ¹⁴	0.0049
x_3	9.6331 10 ⁰⁷	9.6344 10 ⁰⁷	0.0001
$x_1 x_3$	7.0719 10 ¹⁰	7.0643 10 ¹⁰	-0.0010
$x_2 x_3$	1.4459 10 ¹⁰	1.4369 10 ¹⁰	-0.0061
$x_1^2 x_3$	5.3512 10 ¹³	5.3391 10 ¹³	-0.0022
$x_1 x_2 x_3$	1.0529 10 ¹³	1.0419 10 ¹³	-0.0104
$x_2^2 x_3$	2.4703 10 ¹²	2.4232 10 ¹²	-0.0190
$x_1^3 x_3$	4.1639 10 ¹⁶	4.1495 10 ¹⁶	-0.0034
$x_1^2 x_2 x_3$	7.9145 10 ¹⁵	7.7969 10 ¹⁵	-0.0148
$x_1 x_2^2 x_3$	1.7846 10 ¹⁵	1.7388 10 ¹⁵	-0.0256
$x_2^3 x_3$	4.5968 10 ¹⁴	4.4599 10 ¹⁴	-0.0297
x_3^2	5.8803 10 ¹⁰	5.8834 10 ¹⁰	0.0005
$x_1 x_3^2$	4.4428 10 ¹³	4.4390 10 ¹³	-0.0008
$x_2 x_3^2$	8.4625 10 ¹²	8.4183 10 ¹²	-0.0052
$x_1^2 x_3^2$	3.4495 10 ¹⁶	3.4411 10 ¹⁶	-0.0024
$x_1 x_2 x_3^2$	6.3004 10 ¹⁵	6.2306 10 ¹⁵	-0.0110
$x_2^2 x_3^2$	1.4267 10 ¹⁵	1.3912 10 ¹⁵	-0.0248
x_3^3	4.0130 10 ¹³	4.0163 10 ¹³	0.0008
$x_1 x_3^3$	3.0917 10 ¹⁶	3.0897 10 ¹⁶	-0.0006
$x_2 x_3^3$	5.5134 10 ¹⁵	5.4896 10 ¹⁵	-0.0043
x_3^4	2.9156 10 ¹⁶	2.9187 10 ¹⁶	0.0010

Tabelle 7.1.: Berechnung der Momente für Beispiel 1, dabei ist $f(x_1, x_2, x_3)$ die Momentenfunktion, $M[f]$ der Wert des zu dieser Momentenfunktion gehörenden Momentes und $M_{naeh}[f]$ die Näherung dieses Momentes mittels der Formeln aus Abschnitt 6.2.3

Nr.	tatsächlich	exakt	$\rightarrow x_1$	$\rightarrow x_2$	$\rightarrow x_3$	$\odot x_1$	$\odot x_2$	$\odot x_3$
1	3329	3357	3357	3295	3357	3556	3357	3166
2	5731	5781	6001	5452	5781	6821	5388	5751
3	10186	10489	11408	9210	10489	14529	8696	10769
4	45135	50390	53463	44203	50390	70481	42138	45044
5	$1.74 \cdot 10^6$	$1.72 \cdot 10^6$	$1.72 \cdot 10^6$	$1.68 \cdot 10^6$	$1.73 \cdot 10^6$	$1.75 \cdot 10^6$	$1.71 \cdot 10^6$	$1.62 \cdot 10^6$
6	$2.80 \cdot 10^6$	$2.70 \cdot 10^6$	$2.80 \cdot 10^6$	$2.54 \cdot 10^6$	$3.10 \cdot 10^6$	$2.75 \cdot 10^6$	$2.57 \cdot 10^6$	$2.68 \cdot 10^6$
7	$4.54 \cdot 10^6$	$4.21 \cdot 10^6$	$4.63 \cdot 10^6$	$3.61 \cdot 10^6$	$5.86 \cdot 10^6$	$4.30 \cdot 10^6$	$1.50 \cdot 10^6$	$4.40 \cdot 10^6$
8	$1.07 \cdot 10^9$	$1.05 \cdot 10^9$	$1.05 \cdot 10^9$	$1.03 \cdot 10^9$	$1.03 \cdot 10^9$	$1.08 \cdot 10^9$	$1.04 \cdot 10^9$	$1.02 \cdot 10^9$
9	$-1.60 \cdot 10^9$	$7.61 \cdot 10^8$	$6.98 \cdot 10^8$	$8.36 \cdot 10^8$	$5.44 \cdot 10^8$	$7.05 \cdot 10^8$	$7.69 \cdot 10^8$	$4.82 \cdot 10^8$
10	$7.35 \cdot 10^{11}$	$7.17 \cdot 10^{11}$	$7.17 \cdot 10^{11}$	$7.04 \cdot 10^{11}$	$6.98 \cdot 10^{11}$	$7.49 \cdot 10^{11}$	$7.24 \cdot 10^{11}$	$6.73 \cdot 10^{11}$
11	$5.45 \cdot 10^{14}$	$5.78 \cdot 10^{14}$	$5.78 \cdot 10^{14}$	$5.78 \cdot 10^{14}$	$5.09 \cdot 10^{14}$	$6.10 \cdot 10^{14}$	$5.67 \cdot 10^{14}$	$5.78 \cdot 10^{14}$

Tabelle 7.2.: Vergleich der tatsächlichen Momente der zweiten Maschine mit den berechneten Momenten der zweiten Maschine (Beispiel 2) aus den Momenten der ersten Maschine (Beispiel 1) unter Vorgabe der exakten Lageveränderung sowie unter Verschiebungen ($\rightarrow x_1$, $\rightarrow x_2$, $\rightarrow x_3$) um 10 mm in Richtung der Achsen und Drehungen ($\odot x_1$, $\odot x_2$, $\odot x_3$) um die Achsen durch den Koordinatenursprung um 5°

7.2. Gepäckstückähnliche Testobjekte

Die Positionswiederfindung mittels Inkonsistenzanalyse wurde an dem in Abbildung 7.3 dargestellten Testobjekt für jeweils fünf Ausgangs- und Endpositionen getestet. Außerdem wurden auch Positionswiederfindungen mit dem in Abbildung 7.5 dargestellten Testobjekt durchgeführt. Die verschiedenen Testobjekte haben dieselben äußeren Abmessungen und können als verschiedene Füllungen eines Koffers interpretiert werden. Für das in Abbildung 7.5 dargestellte Testobjekt ergaben sich keine wesentlich verschiedenen Ergebnisse, so dass hier nur die Ergebnisse für das in Abbildung 7.3 dargestellte Objekt angegeben sind. In Abbildung 7.4 ist ein für die Tests verwendetes, simuliertes Bild dargestellt.

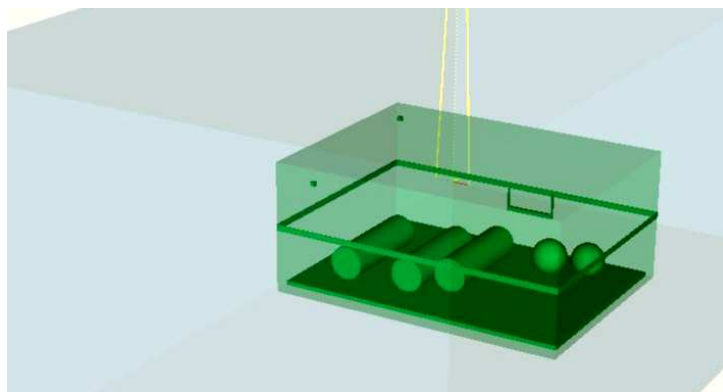


Abbildung 7.3.: Gepäckstückähnliche Testszene (Lage L1)

Die verschiedenen Lagen L1 bis L5 des Testobjektes sind in Abbildung 7.6 dargestellt. Der Testkoffer wurde dabei im Vergleich zur Lage L1 auf dem Band gedreht und verschoben, umgeklappt und auf die Seite gestellt. Die Parameter dieser Transformationen sind in Tabelle 7.4 dargestellt.

Die Größe der Inkonsistenzwerte I_5 sind für das Beispiel der Positionswiederfindung L1→L2 für Abweichungen von der exakten Lageveränderung in der Abbildung 7.7 angegeben. Hierbei

Nr.	exakt.	$\rightarrow x_1$	$\rightarrow x_2$	$\rightarrow x_3$	$\odot x_1$	$\odot x_2$	$\odot x_3$
1	0.0084	0.0084	-0.0101	0.0084	0.0681	0.0084	-0.0490
2	0.0088	0.0471	-0.0485	0.0088	0.1902	-0.0598	0.0035
3	0.0297	0.1199	-0.0957	0.0297	0.4263	-0.1462	0.0572
4	0.1164	0.1845	-0.0206	0.1164	0.5615	-0.0664	-0.0020
5	-0.0156	-0.0156	-0.0332	0.0035	-0.0060	-0.0186	-0.0701
6	-0.0378	0.0007	-0.0941	-0.0175	0.1060	-0.0811	-0.0423
7	-0.0742	0.0199	-0.2048	-0.0523	0.2894	-0.6696	-0.0307
8	-0.0199	-0.0199	-0.0356	0.0124	-0.0378	-0.0269	-0.0422
9	-1.4753	-1.4364	-1.5225	-1.4409	-1.3403	-1.4808	-1.3012
10	-0.0250	-0.0250	-0.0431	0.0182	-0.0504	-0.0150	-0.0844
11	0.0604	0.0604	0.0604	0.1182	-0.0669	0.0394	0.0604

Tabelle 7.3.: Relative Abweichung der tatsächlichen Momente der zweiten Maschine von den berechneten Momenten der zweiten Maschine (Beispiel 2) aus den Momenten der ersten Maschine (Beispiel 1) unter Vorgabe der exakten Lageveränderung sowie unter Verschiebungen ($\rightarrow x_1$, $\rightarrow x_2$, $\rightarrow x_3$) um 10 mm in Richtung der Achsen und Drehungen ($\odot x_1$, $\odot x_2$, $\odot x_3$) um die Achsen durch den Koordinatenursprung um 5°

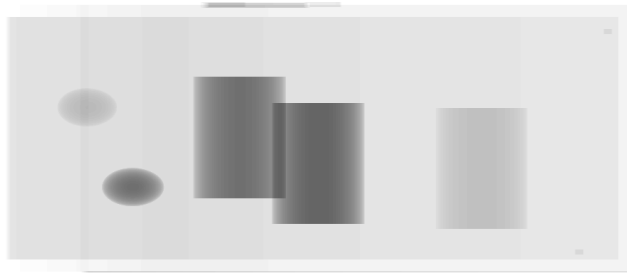


Abbildung 7.4.: Simuliertes Bild (Lage L1) - Simuliert wurden die Werte der Linienintegrale; erstellt mit aRTist

bezeichnet „L1 \rightarrow L2“ die Positionswiederfindung, wenn L1 die Lage in der Maschine der ersten Stufe und L2 die Lage in der Maschine der zweiten Stufe ist.

Es zeigte sich, dass bei Variation jeweils eines Parameters (Drehwinkel oder Verschiebung) das Minimum des Inkonsistenzwertes bereits für Drehwinkel von weniger als 1° und für Verschiebungen von weniger als 2 mm angenommen wird. Das bedeutet, dass der Inkonsistenzwert genau dann sehr klein wird, wenn sich untersuchte und exakte Lage wenig unterscheiden.

Für die Startwertbestimmung ist es zunächst nötig, den Schwerpunkt des Objektes innerhalb der zweiten Maschine zu bestimmen. Näherungen für den Schwerpunkt wurden aus einem oder aus zwei Projektionsbildern bestimmt. Diese Näherungen sind für verschiedene Beispiele in Abbildung 7.8 dargestellt.

Zum Vergleich ist auch der aus fünf Projektionsbildern ermittelte Schwerpunkt angegeben. Dieser dient als Referenzwert, da nach Abschnitt 7.1 die Momente des Objektes und damit der Schwerpunkt aus fünf Projektionsbildern genau bestimmt werden können. Die Quelle zur Aufnahme des ersten Projektionsbildes liegt bei etwa $(0, -400, 0)^T$. Die Abweichungen zwischen den berechneten Schwerpunkten für jeweils eine Lage sind orthogonal zur Projektionsrichtung gering.

Beispiel	$\rightarrow x_1[\text{mm}]$	$\rightarrow x_2[\text{mm}]$	$\rightarrow x_3[\text{mm}]$	$\odot x_1[^\circ]$	$\odot x_2[^\circ]$	$\odot x_3[^\circ]$
L1	0	0	0	0	0	0
L2	120	10	100	0	85	0
L3	220	20	180	0	30	-3
L4	270	30	50	5	-175	180
L5	40	130	400	90	45	0

Tabelle 7.4.: Lageveränderungen gegenüber der Lage L1: Die Rotation wird jeweils um den Koffermittelpunkt ausgeführt.

Die Startwertbestimmung mit dem in Abschnitt 6.4 dargestellten Verfahren ergibt jeweils 16 verschiedene Startwerte. Für jeden dieser Startwerte wurde eine Iteration zur Minimierung des Inkonsistenzwertes mit bis zu 150 Iterationsschritten durchgeführt.

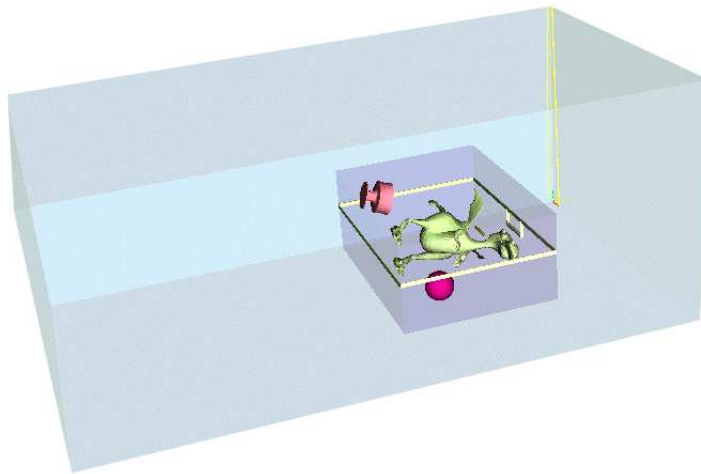


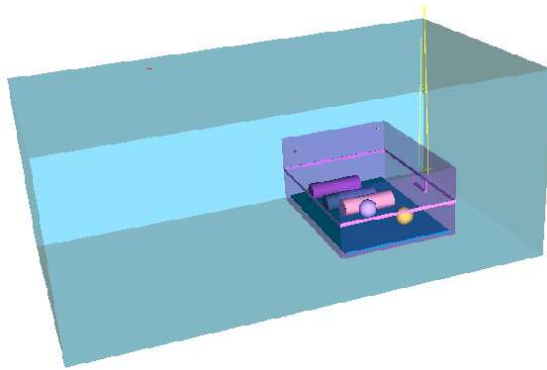
Abbildung 7.5.: Gepäckstückähnliche Testszene (Lage L1 mit anderer Füllung)

Das Ergebnis jeder Iteration ist eine Lageveränderung, der ein Inkonsistenzwert I_4 beziehungsweise I_5 und ein Lagefehler d zugeordnet sind.

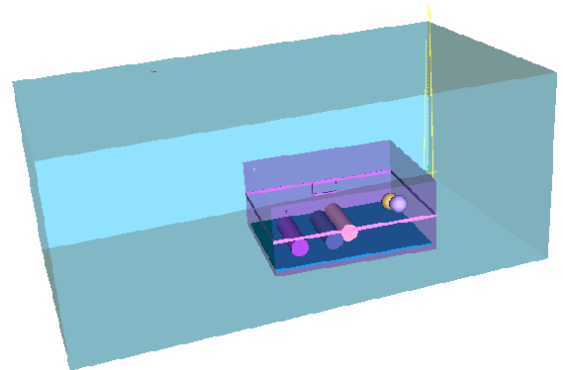
Der Inkonsistenzwert I_4 ergibt sich aus der Betrachtung der Momente bis zur vierten Ordnung, entsprechend ergibt sich I_5 aus der Betrachtung der Momente bis zur fünften Ordnung. Der Lagefehler d berechnet sich dabei aus dem Durchschnitt der Abweichung der Ecken des Testobjektes von ihrer korrekten Position. Der Lagefehler für Punkte im Inneren des Objektes ist deutlich kleiner als d .

Die Ergebnisse der Iterationen zur Minimierung von I_4 sind in Tabelle 7.5 dargestellt, wobei die Ergebnisse nach der Größe des Inkonsistenzwertes I_4 geordnet und zur besseren Vergleichbarkeit durch den kleinsten Inkonsistenzwert $I_{4,min}$ geteilt wurden. In Tabelle 7.6 ist zusätzlich der Inkonsistenzwert I_5 dargestellt.

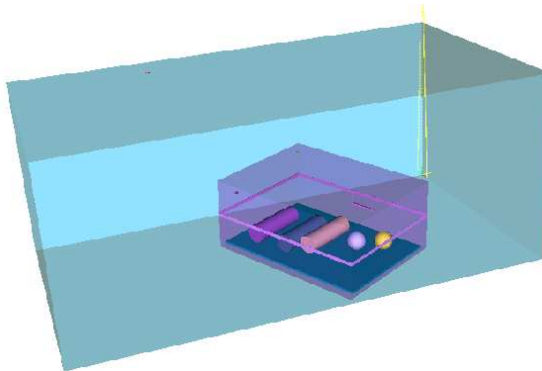
In den in Tabelle 7.5 angegebenen Beispielen L1→L2 und L3→L2 hatten die Iterationsergebnisse mit dem kleinsten Lagefehler d auch den kleinsten Inkonsistenzwert I_4 . Der Algorithmus bewertet also für diese Beispiele die Iterationsergebnisse mit dem kleinsten Lagefehler als die Besten. In den Abbildungen 7.9 und 7.10 wurden für zwei Beispiele die Ergebnisse der Positionswiederfindung visualisiert.



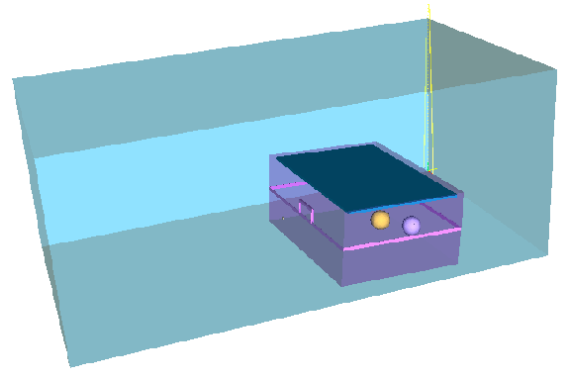
Lage L1



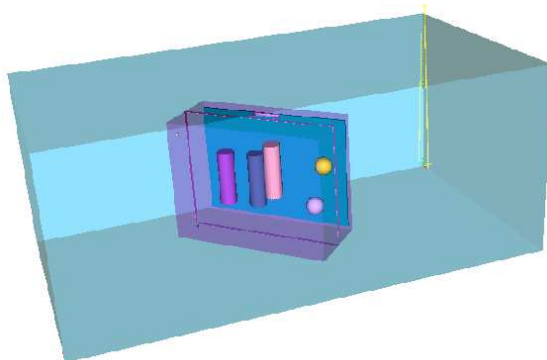
Lage L2



Lage L3



Lage L4



Lage L5

Abbildung 7.6.: Testobjekt in verschiedenen Lagen

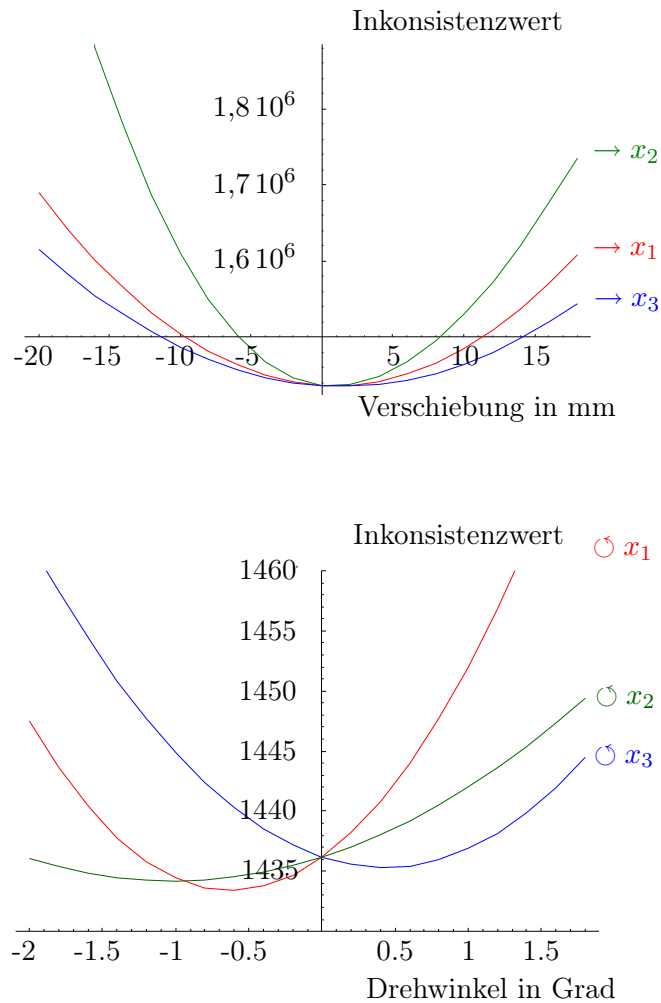


Abbildung 7.7.: Inkonsistenzwert für kleine Abweichungen von der korrekten Lage für das Beispiel L1→L2; $\rightarrow x_1$: Verschiebung parallel zur x_1 -Achse ($\rightarrow x_2$, $\rightarrow x_3$ analog); $\odot x_1$: Drehung um den Schwerpunkt des Objektes parallel zur x_1 -Achse im Gegenuhrzeigersinn ($\odot x_2$, $\odot x_3$ analog)

Bei den in Tabelle 7.6 gezeigten Beispielen L1→L3 und L2→L3 haben auch Iterationsergebnisse mit großem Lagefehler d kleine Inkonsistenzwerte. Daraus folgt, dass die Betrachtung der Momente bis zur 4. Ordnung nicht immer ausreicht, um die Positionswiederfindung eindeutig durchzuführen. Aus diesem Grund wurden zusätzlich die Momente der 5. Ordnung in die Inkonsistenzanalyse einbezogen. In Tabelle 7.6 werden die Inkonsistenzwerte I_4 mit den Inkonsistenzwerten I_5 verglichen. Die Inkonsistenzwerte I_5 sind für Lageveränderungen mit kleinem Lagefehler kleiner als für Lageveränderungen mit großem Lagefehler. Ähnliches ergab sich für die weiteren Beispiele. Es wurde also nicht nur theoretisch, sondern auch am Beispiel nachgewiesen, dass sich die Iterationsgröße durch Einbeziehung zusätzlicher Momente verbessern lässt.

Die Berechnung der Startwerte erfolgt mit den Momenten bis zur zweiten Ordnung, daher weisen alle obigen Lösungen bei der Betrachtung der Momente bis zur zweiten Ordnung nur sehr kleine Inkonsistenzwerte im Vergleich zu beliebigen anderen Lagen auf. Auch bei Einbeziehung zusätzlicher Momente höherer Ordnung ist der Inkonsistenzwert für Lageveränderungen, die deutlich

Nr.	$d[\text{mm}]$	$I_4/I_{4,\min}$	Nr.	$d[\text{mm}]$	$I_4/I_{4,\min}$
1	24	1.00	1	38	1.00
2	25	1.00	2	48	1.01
3	664	1.08	3	654	1.13
4	628	1.36	4	654	1.13
5	625	1.36	5	658	1.16
6	655	1.39	6	652	1.17
7	439	1.41	7	67	1.17
8	442	1.44	8	684	1.25
9	437	1.46	9	635	1.26
10	479	1.46	10	510	1.29
11	692	1.50	11	513	1.33
12	692	1.69	12	104	1.40
13	717	1.76	13	176	1.41
14	719	2.08	14	207	1.45
15	223	2.09	15	373	1.95
16	251	2.16	16	681	2.28

Tabelle 7.5.: Lagefehler d und Inkonsistenzwert I_4 der Iterationsergebnisse zu den verschiedenen Startwerten - Beispiel L1→L2, vierte Ordnung (links) - Beispiel L3→L2, vierte Ordnung (rechts)

von diesen Startwerten abweichen, allein aufgrund der Inkonsistenzen in den Momenten bis zur zweiten Ordnung ebenfalls groß (Abbildung 7.11).

Die Positionswiederfindung wurde auch für den Fall untersucht, dass in der Maschine der zweiten Stufe zwei Dual-Energie Durchstrahlungsbilder aufgenommen werden. Es ist davon auszugehen, dass die Genauigkeit und Sicherheit der Positionswiederfindung aufgrund der erhöhten Datenmenge deutlich zunehmen.

Für die Simulation der Bilder zu den beiden Energien wurden jeweils unterschiedliche Kofferfüllungen (Abbildung 7.3 und 7.5) verwendet. Für die Positionswiederfindung wurden in der Maschine der ersten Stufe die Lagen L1, L2 und L4 und in der Maschine der zweiten Stufe die Lagen L1, L2, L4 und L5 verwendet. Die Ergebnisse der Positionswiederfindung sind in Tabelle 7.7 dargestellt.

Für die Lageveränderungen in der Banebene ergibt sich eine maximale Abweichung von 23,3 mm.² In allen Fällen konnte die Positionswiederfindung also erfolgreich durchgeführt werden.

7.3. Einfluss des Rauschens und der Materialkalibrierung

Die Grauwerte der Pixel von realen Röntgenbildern sind mit voneinander unabhängigen zufälligen Fehlern behaftet. Dieser Effekt wird als Rauschen bezeichnet. Es wurde untersucht, inwieweit das Rauschen die Positionswiederfindung beeinflusst. Für das Rauschen wurde ein einfaches Modell gewählt, welches die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Der Erwartungswert des Grauwertes des verrauschten Bildes soll gleich dem Grauwert des unverrauschten Bildes sein.

²Die höhere Abweichung für Lage L5 ist dadurch erklärbar, dass der Koffer infolge der aufrechtstehenden Lage einen ungünstigen Objektbereich hat, in dem die Näherungen für die Momente schlechter sind.

Nr.	$d[\text{mm}]$	$I_4/I_{4,\min}$	$I_5/I_{5,\min}$	Nr.	$d[\text{mm}]$	$I_4/I_{4,\min}$	$I_5/I_{5,\min}$
1	671	1.00	1.22	1	500	1.00	1.06
2	41	1.01	1.00	2	659	1.02	1.18
3	485	1.02	1.25	3	31	1.05	1.00
4	685	1.06	1.31	4	686	1.10	1.20
5	652	1.11	1.33	5	661	1.26	1.44
6	621	1.16	1.49	6	421	1.29	1.61
7	571	1.28	..	7	626	1.31	..
8	421	1.32	..	8	625	1.58	..
9	217	1.43	..	9	320	1.61	..
10	669	1.51	..	10	696	1.62	..
11	420	1.52	..	11	364	1.71	..
12	712	1.81	..	12	600	1.72	..
13	407	2.04	..	13	649	1.85	..
14	411	2.12	..	14	560	1.98	..
15	611	2.45	..	15	411	2.50	..
16	490	3.21	..	16	463	3.08	..

Tabelle 7.6.: Vergleich der Inkonsistenzwerte bei Verwendung von Momenten bis zur vierten beziehungsweise fünften Ordnung für das Beispiel L1→L3 (links) und das Beispiel L2→L3 (rechts)

		Maschine der zweiten Stufe			
	Lage	L1	L2	L4	L5
Maschine	L1	10.3	2.2	5.1	19.8
der ersten	L2	1.9	16.2	21.9	27.6
Stufe	L4	10.7	23.3	10.0	45.1

Tabelle 7.7.: Genauigkeit der Positionswiederfindung in mm bei Verwendung von zwei simulierten Dual-Energieaufnahmen in der Maschine der zweiten Stufe

- Das Rauschen soll ähnlich wie bei realen Bildern umso größer sein, je mehr Material vorhanden ist.

Der Grauwert \tilde{L} des verrauschten Bildes wird aus dem Grauwert L des unverrauschten Bildes mit $\tilde{L} = (1 - \eta)L + \eta L\chi$ berechnet, wobei $\eta \in \mathbb{R}$ die Stärke des Rauschens angibt und χ eine auf dem Intervall $[0,2]$ gleichverteilte Zufallsvariable ist.

Die in den Abbildungen 7.12 und 7.13 gezeigten Bilder sind durch Verrauschen des in Abbildung 7.4 dargestellten Bildes mit den Parametern $\eta = 0.5$ und $\eta = 1$ erzeugt worden. Die Ergebnisse für die Positionswiederfindung mit verrauschten Bildern sind in Tabelle 7.8 für das Beispiel L1→L2 dargestellt. Obwohl das Rauschen im Vergleich zu Bildern aus der Gepäckprüfung deutlich größer angenommen wurde, ergibt sich für verrauschte Bilder nahezu dasselbe Ergebnis wie für unverrauschte Bilder.

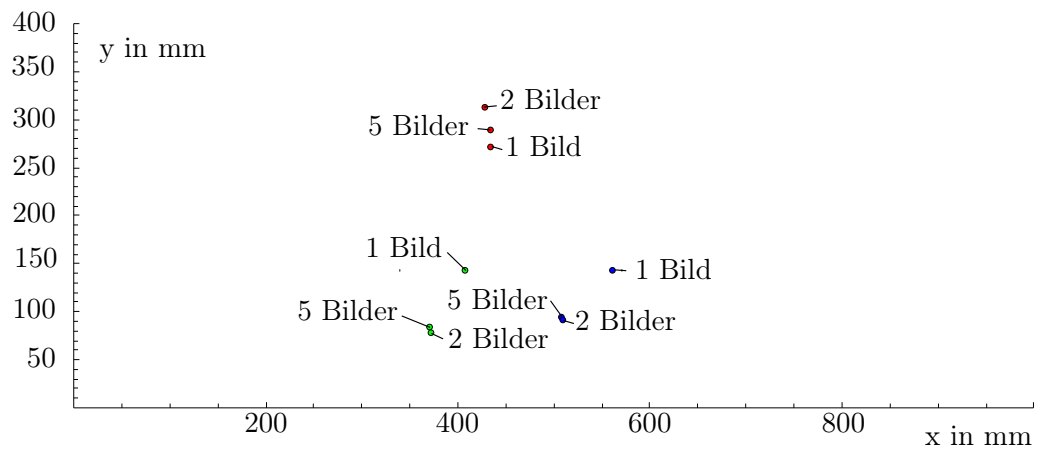


Abbildung 7.8.: Aus den Momenten der Bilder berechnete Schwerpunkte: Zur Berechnung wurden jeweils 5, 2 oder 1 Durchstrahlungsbild(er) verwendet. - Beispiel L1 (Grün), Beispiel L2 (Blau), Beispiel L5 (Rot)

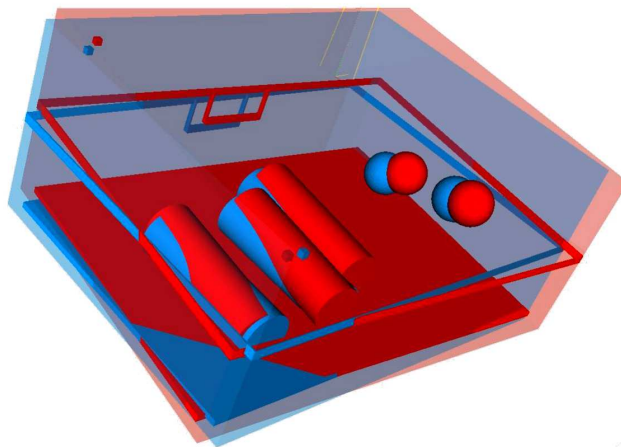


Abbildung 7.9.: Darstellung von realer Position (blau) und berechneter Position (rot) L1→L2

Eine fehlerhafte Materialkalibrierung führt dazu, dass aus den Grauwerten des unkalibrierten Bildes nicht das exakte Linienintegral L der Schwächungskoeffizientenverteilung bestimmt werden kann. Im Gegensatz zum Rauschen sind die auftretenden Fehler nicht zufällig, sondern systematisch.

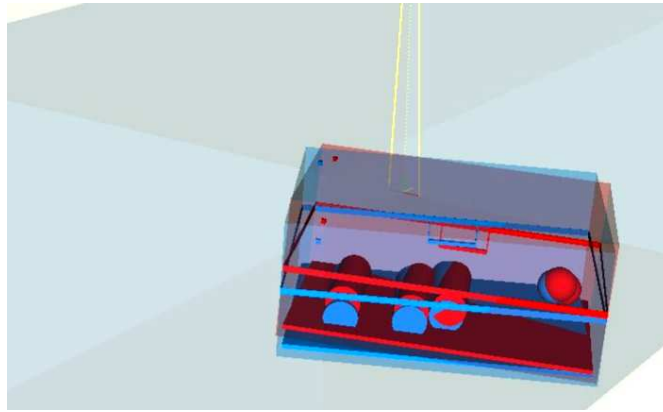


Abbildung 7.10.: Darstellung von realer Position (blau) und berechneter Position (rot) L1→L3

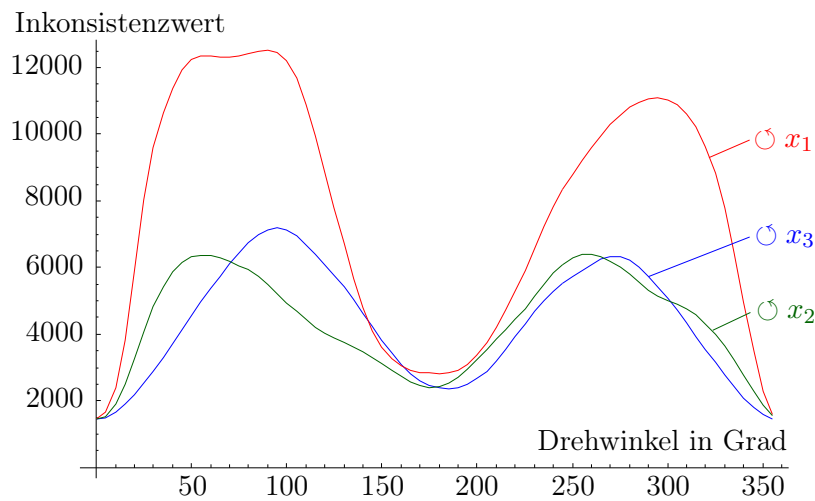


Abbildung 7.11.: Inkonsistenzwert für große Abweichungen von der korrekten Lage für das Beispiel L1→L2; Drehung um den Schwerpunkt des Objektes parallel zur x_1 -Achse im Gegenurzeigersinn ($\odot x_2$, $\odot x_3$ analog)

Die Materialkalibrierung ist für dünne Schichten, das heißt bei kleinen Grauwerten des materialkalibrierten Bildes, besonders genau. Fehler treten also nur bei großen Grauwerten auf. Um eine fehlerhafte Materialkalibrierung zu simulieren, wurden deshalb aus den Bildern neue Bilder mit leicht veränderten Grauwerten \tilde{L}_{mat} mit $\tilde{L}_{mat} = L + 0.05 L_{max} \left(\frac{L}{L_{max}} \right)^2$ bestimmt.

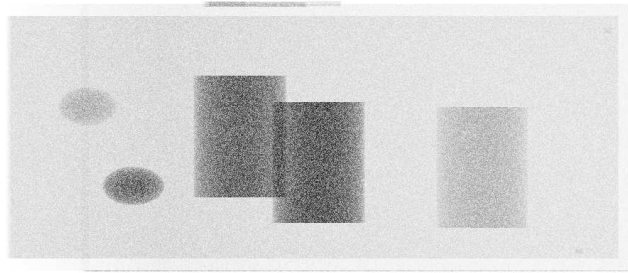


Abbildung 7.12.: Simuliertes Bild mit Rauschen, $\eta = 0.5$, Lage L1

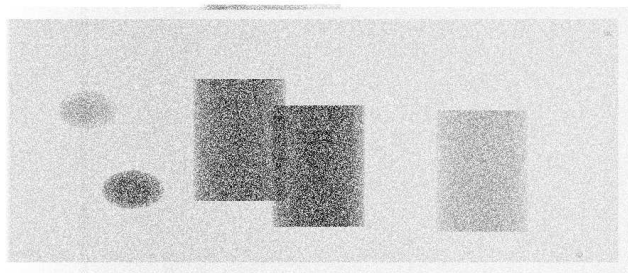


Abbildung 7.13.: Simuliertes Bild mit Rauschen, $\eta = 1.0$, Lage L1

Dabei ist L_{max} der größte im Bild vorkommende Grauwert. Für diesen ist also der Wert um 5 Prozent abgewandelt worden. Wie aus Tabelle 7.8 zu entnehmen ist, wurde mit dem gewählten Modell kein Einfluss der fehlerhaften Materialkalibrierung auf die Positionswiederfindung festgestellt.

Effekt	$d[\text{mm}]$	$I_4/I_{4,min}$
ohne Störeffekt	24.0	1.00
Rauschen $\eta = 0.5$	19.1	0.99
Rauschen $\eta = 1$	18.6	0.99
fehlerhafte Materialkalibrierung	17.2	1.07

Tabelle 7.8.: Einfluss von Rauschen und fehlerhafter Materialkalibrierung auf die Positionswiederfindung (Beispiel L1→L2)

8. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde für die automatisierte Gepäckkontrolle auf Flughäfen ein neues Verfahren zur Positionswiederfindung entwickelt und getestet. Es beruht auf der Verwendung der Momente der Grauwertverteilungen der Durchstrahlungsbilder und der Momente der Schwächungskoeffizientenverteilung des Gepäckstückes.

Unter der Voraussetzung, dass nur Lageveränderungen des Gepäckstückes stattfinden und eventuelle Formveränderungen geringfügig sind, weist das Verfahren die folgenden Vorteile auf:

- Es kann unabhängig von Form oder Inhalt des Gepäckstückes eingesetzt werden.
- Es benötigt keine zusätzlichen Markierungen und ist robust gegenüber Störeinflüssen.
- Es wird in der Maschine der zweiten Stufe nur ein Projektionsbild benötigt, obwohl das Gepäckstück seine Lage beim Transport zu dieser Maschine in beliebiger Weise verändern kann.
- Durch die Verwendung zusätzlicher Bilder kann eine weitere Verbesserung der Ergebnisse erreicht werden.

Damit ist das neu entwickelte Verfahren der Positionswiederfindung mit Momenten bereits existierenden Verfahren zur Positionswiederfindung deutlich überlegen.

Die benötigten Grundlagen der Physik zur Wechselwirkung von Photonen mit Materie, die Grundlagen der Abbildungsgeometrie und der Theorie der Momente wurden in einer für die Lösung des Problems zweckmäßigen Form aufbereitet.

Durch Weiterentwicklung der theoretischen Grundlagen wurden Voraussetzungen für das neue Verfahren zur Positionswiederfindung geschaffen. Für den Fall der Parallelprojektionsgeometrie wurde ein linearer, exakt geltender Zusammenhang zwischen den Momenten der Grauwertverteilungen der materialkalibrierten Durchstrahlungsbilder und den Momenten der Schwächungskoeffizientenverteilung des Gepäckstückes hergeleitet und bewiesen. Voraussetzung dafür war die Durchführung einer neuartigen Materialkalibrierung.

Für den Fall der Fächerschargeometrie wurden die charakteristischen integralen Größen des Objektes gefunden, für welche ein linearer, exakt geltender Zusammenhang zu den Momenten der Bilder existiert. Darüber hinaus wurde zwischen diesen Größen und den Momenten des Objektes ein linearer, näherungsweise geltender Zusammenhang hergeleitet. Durch Verknüpfen ließ sich der gesuchte lineare, näherungsweise geltende Zusammenhang zwischen den Momenten des Bildes und den Momenten des Objektes finden.

Sowohl die Momente des Objektes als auch die charakteristischen Größen werden durch gewichtete Integration über die Schwächungskoeffizientenverteilung berechnet. Ihr Zusammenhang wird durch Ermittlung der Näherungen zwischen den zugehörigen Wichtungsfunktionen berechnet.

Das in Abschnitt 6.2.2 beschriebene Verfahren zur Ermittlung dieser Näherungen ist für den Fall komplanarer ebener Strahlenfächer anwendbar, also auch für den häufig auftretenden Fall, dass alle Strahlenfächer senkrecht zum Band stehen. Das in Abschnitt 6.2.3 beschriebene Verfahren

ist eine Weiterentwicklung dieses Verfahrens und ist auch im Fall nicht komplanarer und nicht ebener Fächer einsetzbar.

Neben der Weiterentwicklung der theoretischen Grundlagen war es notwendig, neue Methoden sowohl

- zur Geometriekalibrierung als auch
- zur Materialkalibrierung

als verfahrenstechnische Voraussetzungen für die Positionswiederfindung zu entwickeln. Das neue Verfahren zur Geometriekalibrierung gestattet die Bestimmung der genauen Lage jedes einzelnen Röntgenstrahls. Mit dem ebenfalls im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Kalibrierkörper und der dazugehörigen Auswertungssoftware kann die Geometriekalibrierung mit hoher Genauigkeit (Abweichung ≤ 1 mm) durchgeführt werden.

Für die Materialkalibrierung wurde das neue Verfahren inklusive Kalibrierkörper und Auswertungssoftware entwickelt. Damit können aus den Grauwerten der Bilder die Linienintegrale der Schwächungskoeffizientenverteilung entlang der Röntgenstrahlen direkt berechnet werden.

Das Grundkonzept für die Positionswiederfindung wurde am Fall der Parallelstrahlgeometrie im zweidimensionalen Raum entwickelt. Dabei werden zuerst die Momente des Objektes aus den Momenten der Projektionsbilder der ersten Maschine bestimmt. Zu jeder möglichen Lageveränderung lassen sich aus den Momenten des Objektes die Momente des Bildes der zweiten Maschine berechnen. Da diese bekannt sind, kann die tatsächliche Lageveränderung ermittelt werden.

Für den dreidimensionalen Fall wurde ebenfalls ein Positionswiederfindungsalgorithmus angegeben. Dazu war die Betrachtung des Momentenellipsoids, dessen Form durch die Momente des Objekts bis zur 2. Ordnung festgelegt wird, hilfreich. Es gibt 16 Lageveränderungen, welche die Bedingung, dass das Momentenellipsoid des Objektes auf die Momentenellipse des Projektionsbildes der Maschine der zweiten Stufe deckungsgleich projiziert wird, erfüllen. Diese 16 Lageveränderungen wurden als Startwerte für die Positionswiederfindung im Fall der Fächerschargeometrie verwendet.

Bei der Übertragung des Algorithmus auf den Fall der Fächerschargeometrie ergaben sich gravierende Schwierigkeiten, da der ermittelte Zusammenhang zwischen den Momenten des Bildes und den Momenten des Objektes nur näherungsweise gilt. Um diese Schwierigkeiten zu lösen, wurde das neue Verfahren der Inkonsistenzanalyse entwickelt. Bei diesem wird zu jeder Lageveränderung ein Inkonsistenzwert berechnet, welcher umso größer ist, je schlechter die Momente der Bilder der ersten Maschine zu den Momenten der Bilder der zweiten Maschine passen. Durch Minimierung des Inkonsistenzwertes mittels eines Iterationsverfahrens werden aus den Startwerten Lageveränderungen berechnet. Welche Lageveränderung der Wirklichkeit am ehesten entspricht, wird durch Vergleich der Inkonsistenzwerte entschieden.

Durch die zusätzliche Einbeziehung von Momenten höherer Ordnung oder durch die Verwendung von zwei Projektionsbildern in der zweiten Maschine können die Ergebnisse weiter verbessert werden. Dieser Effekt wurde an simulierten Beispielen nachgewiesen.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit musste eine Reihe von mathematischen Teilproblemen gelöst werden. Dazu gehören

- die Bestimmung der Lage eines Ellipsoides anhand seines Parallelprojektionsbildes (Abschnitt 6.4),
- die Bestimmung der Ausgleichsgeraden für eine Punktmenge bei Vorgabe eines Geradenpunktes (Abschnitt 4.1),

- die Bestimmung der Ausgleichsgeradenschar mit einem gemeinsamen Punkt, wobei jede Gerade eine Punktmenge annähern soll (Abschnitt 4.1),
- das schnelle Finden von Inkonsistenzen in linearen, stark unterbestimmten Gleichungssystemen unter der Voraussetzung betragskleiner Lösungsvektoren (Abschnitt 6.3),
- die Quadratmittelnäherung von Funktionen unter Ausnutzung der Translationsinvarianz des Raumes der Näherungsfunktionen und der Translationseigenschaften der zu nähernden Funktionen (Abschnitt 6.2.3) und
- die Ermittlung einer Formel für die Koordinatentransformation von Momenten beliebiger Ordnung (Abschnitt 5.3).

Das entwickelte Verfahren zur Positionswiederfindung wurde an simulierten Beispielen mit guten Ergebnissen getestet.

Ausblick

Anhand theoretischer Überlegungen ist die Annahme plausibel, dass sich die Ergebnisse des Positionswiederfindungsalgorithmus durch Einbeziehung von Momenten immer höherer Ordnung in die Inkonsistenzanalyse beliebig verbessern lassen. Der Nachweis könnte an Beispielen mit eindimensionalen Projektionsbildern und zweidimensionalen Objekten erbracht werden.

Die in der Arbeit entwickelte Methode der Inkonsistenzanalyse bietet die Möglichkeit, die Kalibrierung von Durchstrahlungsanlagen, bestehend aus Geometriekalibrierung und Materialkalibrierung, im laufenden Betrieb auf Fehlerfreiheit zu testen, ohne einen Kalibrierkörper zu verwenden. Im Gegensatz zur Positionswiederfindung, bei der eine große Zahl von Iterationsschritten in kurzer Zeit durchgeführt werden muss, wird hier nur ein Fall auf Inkonsistenz überprüft, so dass es nicht nötig ist, sich auf Momente niedriger Ordnung zu beschränken.

Da bei Verwendung polyenergetischer Strahlungsquellen in der Computertomografie der Aufhärtungseffekt auftritt, können aus den Messwerten (Grauwerten der Bilder) die Linienintegrale der Schwächungskoeffizientenverteilung nicht genau bestimmt werden. Die dadurch auftretenden Fehler im 3D-Rekonstrukt der Computertomografie werden als Aufhärtungsartefakte bezeichnet. Nach Anwendung der in dieser Arbeit entwickelten Methode zur Materialkalibrierung können aus den Grauwerten der Dual-Energie-Bilder jeweils Linienintegrale über bestimmte Materialkenngrößen berechnet werden, so dass durch Beseitigung der Aufhärtungsartefakte eine Qualitätsverbesserung der Computertomographie zu erwarten ist.

Literaturverzeichnis

- [1] *Prospektmaterial der Firma Smiths Detection*. Wiesbaden, 2002.
- [2] G. MUSIOL, J. RANFT, R. REIF, D. SEELIGER: *Kern und Elementarteilchenphysik*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1988.
- [3] H. KOLANOSKI: *Anmerkungen zur Energie und Z-Abhängigkeit des Photoeffektes*. Institut für Physik Humboldt Universität Berlin, 2005, URL: <http://www-zeuthen.desy.de/~kolanoski/det07/skripte/photoeffekt.pdf> (19.05.2009).
- [4] PROF. DR. SUTER: *Probleme der modernen Physik: Medizinphysik (Vorlesungsskript)*. 2008.
- [5] H. KRIEGER: *Grundlagen der Strahlungsphysik und des Strahlenschutzes*. Vieweg+Teubner Stuttgart Leipzig, 2007.
- [6] W.R. LEO: *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1994.
- [7] C. GRUPEN: *Teilchendetektoren*. BIVerlag Mannheim, 1993.
- [8] K. KLEINKNECHT: *Detektoren für Teilchenstrahlung*. Teubner Verlag Wiesbaden, 1992.
- [9] P. MARMIER, E. SHELDON: *Physics of Nuclei and Particles Vol.I*. Academic Press, New York, 1969.
- [10] W. HEITLER: *The Quantum Theory of Radiation*. Clarendon Press, Oxford, 1954.
- [11] O. KLEIN, Y. NISHINA: *Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantenmechanik nach Dirac*. Z. Phys **52** (1929) 853.
- [12] K. MÜLLER: *Experimentelle Methoden und Instrumente der Teilchenphysik (Vorlesungsskript)*. ETH Zürich Institute for Particle Physics, 2008, URL: http://www.ipp.phys.ethz.ch/education/lectures/empp/script/km_script1.pdf (19.05.2009).
- [13] M. VON LAUE: *Röntgenstrahlinterferenzen*. Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig, 1948.
- [14] G. CHRIST: *Exact Treatment of Dual-Energy Method in CT Using Polyenergetic X-ray Spectra*. Phys. Med Biol **29** 12 (1984) 1501–1510.
- [15] F. NATTERER: *The mathematics of computerized Tomography*. Wiley-Teubner Series in Computer Science. Wiley New York Brisbane Toronto Singapore, 1986.
- [16] H.G. HAHN: *Technische Mechanik fester Körper*. Carl Hanser Verlag München Wien, 1990.
- [17] R. HAFNER: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1989.
- [18] K. JÄNICH: *Mathematik 2: Geschrieben für Physiker. 2*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002.
- [19] H. SCHWEDTLICK H.-G. ROOS: *Numerische Mathematik*. B. G. Teubner Stuttgart Leipzig, 1999.

- [20] H. STRECKER: *Verfahren zur Bestimmung der Lageänderung eines Gepäckstücks zur Untersuchung einer verdächtigen Region in diesem Gepäckstück*. Europäische Patentschrift EP 1522878, 06.10.2004.
- [21] G.-R. JAENISCH, S. WEGE, C. BELLON, A. ALEKSEYCHUK: *AuGE: Automatische Gepäckprüfung für die Luftfahrt Abschlussbericht Teilaufgabe Simultane Mehrwinkelgepäckprüfung*. BMWA Projekt Nr. 20S0201A, Berlin, 2006.
- [22] A. ALEKSEYCHUK: *Bericht 3D-Positionswiederfindung von Objektbereichen vorgeprüfter Gepäckstücke*. Interner BAM-Bericht, Berlin, 2005.
- [23] A. ALEKSEYCHUK: *Positionswiederfindung mit der Passpunktmethode*. Interner BAM-Bericht, Berlin, 2006.
- [24] G.-R. TILLACK: *Simulation und Rekonstruktion für strahlendiagnostische Verfahren (Habilitationsschrift)*. Saker Verlag, 2001.
- [25] TOSIO KATO: *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1999.
- [26] C. BELLON, G.-R. JAENISCH: *aRTist - Analytical RT Inspection Simulation Tool*. In: *Proceedings of the DIR 2007 - International Symposium on Digital industrial Radiology and Computed Tomography*, 25. - 27. Juni 2007, Lyon.
- [27] T.-M. BUZUG: *Einführung in die Computertomographie - Mathematisch physikalische Grundlagen der Bildrekonstruktion*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
- [28] O. FORSTER: *Analysis 3 Integralrechnung im \mathbb{R}^n mit Anwendungen*. 3. Vieweg Braunschweig Wiesbaden, 1984.
- [29] K. JÄNICH: *Vektoranalysis*. 2. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2001.
- [30] P. FUNK: *Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik*. 2. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1970.
- [31] N. I. AKHIEZER: *The Calculus of Variations*. Harwood academic publishers Chur London Paris New York Melbourne, 1988.
- [32] A. N. TICHONOV, V. Y. ARSENIN: *Solution of Ill Posed Problems*. Wiley New York, 1977.
- [33] B. HOFMANN: *Mathematik inverser Probleme*. Vieweg+Teubner Verlag Stuttgart Leipzig, 1999.
- [34] M. HERMANN: *Numerische Mathematik*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2006.

A. Beweis von Satz 5.1.1

Das Moment $J_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}[w]$ lässt sich mit Gleichung (5.24) umformen zu

$$J_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}[w] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(u, v) \int_{\mathbb{R}} \mu(\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v, t)) dt du dv \quad (\text{A.1})$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(u, v) \mu(\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v, t)) dt du dv. \quad (\text{A.2})$$

Es wird die Substitution

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v, t) \quad (\text{A.3})$$

durchgeführt. Mit Gleichung (5.23) ergibt sich nun für die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Vektors \mathbf{x}

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{(q, m)1} \\ p_{(q, m)2} \\ p_{(q, m)3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} m_{(1)1} & m_{(2)1} & n_1 \\ m_{(1)2} & m_{(2)2} & n_2 \\ m_{(1)3} & m_{(2)3} & n_3 \end{pmatrix}}_{:= \mathbf{A}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ t \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Da $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ drei zueinander orthogonale, normierte Vektoren sind, ist die Matrix \mathbf{A} orthogonal. Es gilt also $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$. Damit kann man nun obige Gleichung nach u, v, t umstellen und erhält

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{(1)1} & m_{(1)2} & m_{(1)3} \\ m_{(2)1} & m_{(2)2} & m_{(2)3} \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right). \quad (\text{A.5})$$

Aus Gleichung (A.4) folgt

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{(1)1} & m_{(2)1} & n_1 \\ m_{(1)2} & m_{(2)2} & n_2 \\ m_{(1)3} & m_{(2)3} & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dt \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Mit dem Transformationssatz für die mehrdimensionale Substitution (siehe [28]) ergibt sich aus den Gleichungen (A.2), (A.3), (A.5) und (A.6)

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}[w] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(\mathbf{m}_1 \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}), \mathbf{m}_2 \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})) \mu(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} w(\mathbf{m}_1 \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q}), \mathbf{m}_2 \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})) \mu(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Es sei

$$\bar{u} := u + c_u \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{v} := v + c_v \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{t} := t + c_t \quad (\text{A.10})$$

mit $c_u, c_v, c_t \in \mathbb{R}$. Aus der Gleichung (5.23) für die Projektionsgeraden wird mit der neuen Parametrisierung (Gleichungen (A.8) bis (A.10)) die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u(\bar{u}), v(\bar{v}), t(\bar{t})) &= \mathbf{q} + (\bar{u} - c_u) \mathbf{m}_1 + (\bar{v} - c_v) \mathbf{m}_2 + (\bar{t} - c_t) \mathbf{n} \\ &= \mathbf{q} - c_u \mathbf{m}_1 - c_v \mathbf{m}_2 - c_t \mathbf{n} + \bar{u} \mathbf{m}_1 + \bar{v} \mathbf{m}_2 + \bar{t} \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Dies entspricht einer um $-c_u \mathbf{m}_1 - c_v \mathbf{m}_2 - c_t \mathbf{n}$ verschobenen Basisquelle, es gilt also

$$\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(\bar{u} - c_u, \bar{v} - c_v, \bar{t} - c_t) = \mathbf{p}_{\mathbf{q} - c_u \mathbf{m}_1 - c_v \mathbf{m}_2 - c_t \mathbf{n}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{t}). \quad (\text{A.12})$$

Weil die Basisquelle Q sowohl in Richtung \mathbf{m}_1 , \mathbf{m}_2 als auch \mathbf{n} verschoben werden kann, ist sie letztlich frei wählbar. Mittels der Substitution $\bar{t} = t + c_t$ lässt sich Gleichung (5.24) zu

$$L_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v, \bar{t} - c_t)) d\bar{t} \quad (\text{A.13})$$

umformen. Daraus wird mit Gleichung (A.12)

$$L_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\mathbf{p}_{\mathbf{q} - c_t \mathbf{n}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v, \bar{t})) d\bar{t}. \quad (\text{A.14})$$

Nach der Anwendung der Bestimmungsgleichung des Projektionsbildes (5.24) ergibt sich

$$L_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v) = L_{\mathbf{q} - c_t \mathbf{n}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v). \quad (\text{A.15})$$

Es ist also möglich, die Basisquelle entlang der Projektionsgeraden zu verschieben, ohne dass sich das Projektionsbild ändert. Aus den Gleichungen (5.24) und (A.12) folgt

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(\bar{u} - c_u, \bar{v} - c_v) &= \int_{\mathbb{R}} \mu(\mathbf{p}_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(\bar{u} - c_u, \bar{v} - c_v, t)) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mu(\mathbf{p}_{\mathbf{q} - c_u \mathbf{m}_1 - c_v \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(\bar{u}, \bar{v}, t)) dt \\ &= L_{\mathbf{q} - c_u \mathbf{m}_1 - c_v \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(\bar{u}, \bar{v}). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Aus den Gleichung (5.25) und (A.16) folgt

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}[w(\bullet_1 - c_u, \bullet_2 - c_v)] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(\bar{u} - c_u, \bar{v} - c_v) L_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(\bar{u}, \bar{v}) d\bar{u} d\bar{v} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(u, v) L_{\mathbf{q}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u + c_u, v + c_v) du dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(u, v) L_{\mathbf{q} + c_u \mathbf{m}_1 + c_v \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}(u, v) du dv \\ &= J_{\mathbf{q} + c_u \mathbf{m}_1 + c_v \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2}[w(\bullet_1, \bullet_2)]. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Durch die Umparametrisierung lässt sich demzufolge die Basisquelle \mathbf{q} um $c_u \mathbf{m}_1 + c_v \mathbf{m}_2$ zu einer neuen Basisquelle $\bar{\mathbf{q}} := \mathbf{q} + c_u \mathbf{m}_1 + c_v \mathbf{m}_2$ verschieben. Ist insbesondere $c_u = -\mathbf{q} \circ \mathbf{m}_1$ und $c_v = -\mathbf{q} \circ \mathbf{m}_2$, so gilt $\bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{m}_1 = 0$ und $\bar{\mathbf{q}} \circ \mathbf{m}_2 = 0$ und die Gleichung (5.26) vereinfacht sich zu Gleichung (5.31).

B. Bild des Geometriekalibrierkörpers

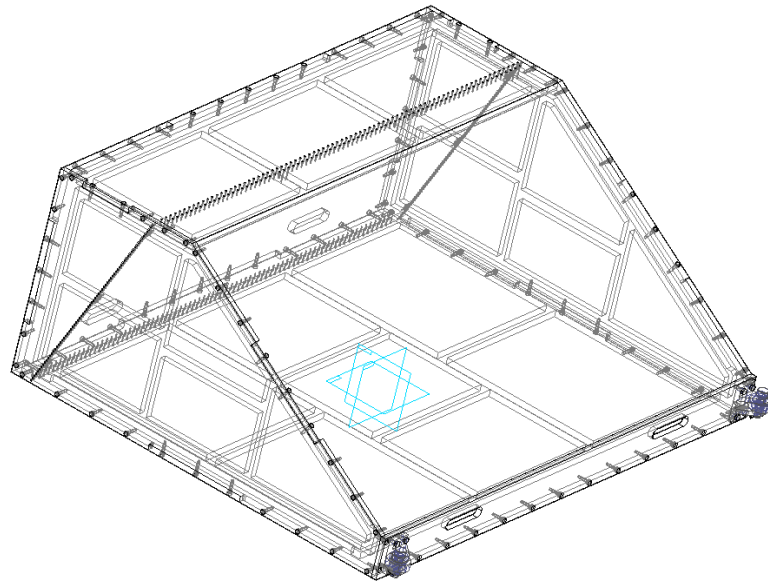


Abbildung B.1.: Konstruktionszeichnung des Geometriekalibrierkörpers dargestellt im Programm solid-edge



Abbildung B.2.: Geometriekalibrierkörper bei der Einfahrt in den Tunnel der EDtS

Versicherung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Die vorliegende Dissertation habe ich an der Technischen Universität Dresden unter wissenschaftlichen Betreuung von Prof. Dr. techn. Gunter Weiß und Priv. Doz. Dr.-Ing. habil. et Dr. rer. nat. Gerd-Rüdiger Jaenisch angefertigt.

Es wurden zuvor keine Promotionsvorhaben unternommen.

Ich erkenne die Promotionsordnung der Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften der TU Dresden vom 20. März 2000, in der geänderten Fassung mit Gültigkeit vom 16. April 2003 und vom 01.10.2008 an.

Dresden den

Unterschrift

Abbildungsverzeichnis

1.1. Mehrstufige Gepäckprüfung	7
1.2. Dual-Energie-Durchstrahlungsbilder der Prüfung eines Gepäckstückes in Stufe 1 .	8
1.3. Ermittlung eines kritischen Bereiches	8
1.4. Lage des kritischen Bereiches in Stufe 2	9
2.1. Detektion eines Photonenstrahls	12
2.2. Photoeffekt	12
2.3. Compton-Effekt	13
2.4. Paarbildung im Kernfeld	14
2.5. Rayleigh-Streuung	15
2.6. Richtungsabhängigkeit elastisch gestreuter Photonen	15
2.7. Schwächung des Photonenstrahls beim Durchstrahlen wechselwirkenden Materials	16
2.8. Aufnahmegeometrie: Die Aufnahmegeometrie entspricht der Zuordnung der Pro- jektionsgeraden zu den Bildpunkten	19
2.9. Parallelprojektion	20
2.10. Schema einer Gepäckprüfanlage der Stufe 1	21
2.11. Fächerschar	22
2.12. Fächerscharkoordinatensystem	23
2.13. Fächerscharprojektion	24
2.14. Beitrag eines Volumenelementes zu einem Moment erster Ordnung	25
2.15. Beitrag eines Volumenelementes zu einem Moment zweiter Ordnung	26
2.16. Schwerpunkt und Momentenellipse einer Durchstrahlungsaufnahme	27
2.17. Ausdehnung der Momentenellipse	28
4.1. Prinzipskizze des Geometriekalibrierkörpers	35
4.2. Durchstrahlungsaufnahme des Geometriekalibrierkörpers	36
4.3. Projektion interpolierter Punkte	37
4.4. Richtungsbestimmung der Führungsgeraden	37
4.5. Bestimmung zweier Punkte einer Projektionsgeraden	38
4.6. Ausgleichsfächer	39
4.7. Abstand $d_P(\mathbf{q} = 0, \mathbf{m})$ von P zur Ausgleichsgeraden	40
4.8. Vergleich der Geometriekalibrierung	43
4.9. Computervisualisierung der EDtS-Aufnahmegeometrie	44
4.10. Geometrische Überlagerung von Herstellerkalibrierung und entwickelter Kalibrierung	45
4.11. Prinzipskizze Doppelstufenkeil	45
4.12. Durchstrahlungsaufnahme eines Doppelstufenkeils für eine Energie	46
4.13. Darstellung der Materialzuordnungstabelle (experimentelle Ergebnisse)	47
4.14. Darstellung der Materialzuordnungstabelle (geglättet)	48
4.15. Materialkalibration einer Dual-Energie-Aufnahme	48
5.1. Beziehung zwischen Momenten von Objekt und Projektionsbild	52
5.2. Objektmomentenellipsoid und sein Parallelprojektionsbild	55
5.3. Objektwichtungsfunktion	56

5.4.	Geometrische Interpretation von $\frac{(\mathbf{f} \times \mathbf{n})}{ (\mathbf{f} \times \mathbf{n}) } \circ (\mathbf{x} - \mathbf{q})$	57
5.5.	Wirkung des Vergrößerungseffektes bei Fächerscharprojektionen	58
5.6.	Uparametrisierung einer Fächerschargeometrie	60
5.7.	Änderung der Bildwichtungsfunktion w bei Uparametrisierung	61
5.8.	Transformation von Schwerpunkt und Momentenellipse	66
6.1.	Prinzip des Positionswiederfindungsalgorithmus	69
6.2.	Bestimmung der Momente des Objektes	70
6.3.	Vier Lösungen zu den Momenten bis zur zweiten Ordnung	73
6.4.	Zusammenhang zwischen Momenten von Bild und Objekt im Fall der Fächerscharprojektionen	74
6.5.	Näherungsbereich	75
6.6.	Schematische Darstellung einer in Führungsgeradenrichtung konstanten Momentenfunktion und ihrer Näherung	84
6.7.	Schematische Darstellung einer in Führungsgeradenrichtung linearen Momentenfunktion und ihrer Näherung	84
6.8.	Bestimmung der Iterationsgröße mittels Vergleich zwischen simulierten und gemessenen Größen	98
6.9.	Bestimmung der Iterationsgröße mittels Inkonsistenzanalyse	100
6.10.	Konsistente und inkonsistente Anordnung	101
6.11.	Vergleich des simulierten Bildes einer inkonsistenten Anordnung mit dem realen Bild	102
6.12.	Quadratmittelnäherung eines eindimensionalen Projektionsbildes durch Polynome bis zur Ordnung k	103
6.13.	Bestimmung der Iterationsgröße mittels indirekter Inkonsistenzanalyse	107
6.14.	Darstellung von \mathcal{V}_M , $\hat{\mathcal{V}}_{M^*}$ und \mathcal{V}_N	112
6.15.	Spiegelung der Aufnahmegeometrie an einer Symmetrieebene des Momentenellipsoides	114
7.1.	Simulierte Testszene (Beispiel 1)	117
7.2.	Simulierte Testszene (Beispiel 2)	118
7.3.	Gepäckstückähnliche Testszene (Lage L1)	120
7.4.	Simuliertes Bild (Lage L1)	121
7.5.	Gepäckstückähnliche Testszene (Lage L1 mit anderer Füllung)	122
7.6.	Testobjekt in verschiedenen Lagen	123
7.7.	Inkonsistenzwert für kleine Abweichungen von der korrekten Lage	124
7.8.	Aus den Momenten der Bilder Berechnete Schwerpunkte	127
7.9.	Darstellung von realer Position (blau) und berechneter Position (rot) L1→L2	127
7.10.	Darstellung von realer Position (blau) und berechneter Position (rot) L1→L3	128
7.11.	Inkonsistenzwert für große Abweichungen von der korrekten Lage	128
7.12.	Simuliertes Bild mit Rauschen, $\eta = 0.5$, Lage L1	129
7.13.	Simuliertes Bild mit Rauschen, $\eta = 1.0$, Lage L1	129
B.1.	Konstruktionszeichnung des Geometriekalibrierkörpers dargestellt im Programm solid-edge	139
B.2.	Geometriekalibrierkörper bei der Einfahrt in den Tunnel der EDtS	139

Tabellenverzeichnis

3.1.	Genauigkeit der Positionswiederfindung mit der Passpunktmethode	34
7.1.	Berechnung der Momente für Beispiel 1, dabei ist $f(x_1, x_2, x_3)$ die Momentenfunktion, $M[f]$ der Wert des zu dieser Momentenfunktion gehörenden Momentes und $M_{naeh}[f]$ die Näherung dieses Momentes mittels der Formeln aus Abschnitt 6.2.3	119
7.2.	Vergleich der tatsächlichen Momente der zweiten Maschine mit den berechneten Momenten der zweiten Maschine (Beispiel 2) aus den Momenten der ersten Maschine (Beispiel 1) unter Vorgabe der exakten Lageveränderung sowie unter Verschiebungen ($\rightarrow x_1, \rightarrow x_2, \rightarrow x_3$) um 10 mm in Richtung der Achsen und Drehungen ($\odot x_1, \odot x_2, \odot x_3$) um die Achsen durch den Koordinatenursprung um 5°	120
7.3.	Relative Abweichung der tatsächlichen Momente der zweiten Maschine von den berechneten Momenten der zweiten Maschine (Beispiel 2) aus den Momenten der ersten Maschine (Beispiel 1) unter Vorgabe der exakten Lageveränderung sowie unter Verschiebungen ($\rightarrow x_1, \rightarrow x_2, \rightarrow x_3$) um 10 mm in Richtung der Achsen und Drehungen ($\odot x_1, \odot x_2, \odot x_3$) um die Achsen durch den Koordinatenursprung um 5°	121
7.4.	Lageveränderungen gegenüber der Lage L1: Die Rotation wird jeweils um den Koffermittelpunkt ausgeführt.	122
7.5.	Lagefehler d und Inkonsistenzwert I_4 der Iterationsergebnisse zu den verschiedenen Startwerten - Beispiel L1→L2, vierte Ordnung (links) - Beispiel L3→L2, vierte Ordnung (rechts)	125
7.6.	Vergleich der Inkonsistenzwerte bei Verwendung von Momenten bis zur vierten beziehungsweise fünften Ordnung für das Beispiel L1→L3 (links) und das Beispiel L2→L3 (rechts)	126
7.7.	Genauigkeit der Positionswiederfindung in mm bei Verwendung von zwei simulierten Dual-Energieaufnahmen in der Maschine der zweiten Stufe	126
7.8.	Einfluss von Rauschen und fehlerhafter Materialkalibrierung auf die Positionswiederfindung (Beispiel L1→L2)	129

Stichwortverzeichnis

- a-priori-Informationen, 34
- a-priori-Wissen, 36, 39
- Abstandsquadratsumme, 40, 41
- Alekseychuk, 31
- Ansatz, 88, 95, 100
- Ansatzraum, 82, 104, 105
- aRTist, 117
- Atomdimension, 11
- Auflösung in Führungsgeradenrichtung, 38
- Aufnahmegeometrie, 19, **20**, 32, 35, 44, 51, 60, 62, 83
 - diskrete, 21
- Ausgangslage, 63
- Ausgleichsfächer, 39
- Ausgleichsgerade, 39

- BAM, 9
- Banddurchstrahlungsanlage, 35
- Banddurchstrahlungsanlagen, 21
- Basisebene, 78, 82
- Basisfächer, **21**, 39, 76, 78
 - komplanare, 80
 - nichtkomplanare, 87
- Basisfunktion, 88
- Basisfunktionen, 79
- Basisgerade, **20**
- Basisquelle, **20**, 51, 53, 111, 138
- Basisvektor, 111, 115
- Bildentstehung, 11
- Bildmoment, **55**, 76, 105, 111
- Bildmomentenellipse, 54
- Bildmomentenfunktion, 83
- Bildmomententensor, 54
- Bildraum, 19, 85
- Bildvergleich, 31
- Bildwichtungsfunktion, **49**, **55**, 79, 101
- Bildzeile, 80, 87
- Binarisierung, 32
- Bindungsenergie, 12
- binomischer Satz, 76, 87
- Blockmatrix, 108
- Bodenplatte, 35

- Boltzmann-Gleichung, 17

- charakteristische Funktionen, 104
- charakteristisches Polynom, 112
- Cholesky, 29
- Compton-Effekt, **13**
- Computervisualisierung, 44
- Coulomb-Feld, 14

- Deltadistribution, 90
- Detektor
 - kollimierter, 11
- Detektorebene, **22**, 53, 56, 111, 115
- Detektorgerade, **21**
- Detektorgeradenrichtung, 60
- Detektorlinie, **21**
- Detektorpunkt, 21
- Diagonalisierung, 112
- Dichte, 16
- Dichteverteilung, 100, 101
 - transformierte, 63
- diskretes Quadratmittelpunktproblem, 86
- Diskretisierung, 79, 81, 88, 95, 104
- divergente Strahlung, 17
- Doppelstufenkeil, **46**
- Drei-Energie-Aufnahmen, 46
- Dual-Energie, 18
- Dual-Energie-Aufnahmen, 46
- durchstrahlte Länge, 46
- Durchstrahlungsaufnahme, 35, 45
- Durchstrahlungsbild, 11, 15, **19**

- ebener Fächer, **21**
- EDtS, 9, 43, 44
- Eigensystem, 109
- Eigenvektor, 109, 112
- Eigenwert, 109, 112
- Eigenwertgleichung, 41
- Einheitskugel, 27–29
- Elektron
 - gebundenes, 12
- Elektronenschale, 13
- Ellipsoid

- entartetes, 111
- Energieabhängigkeit, 13
- entartetes Ellipsoid, 111
- Erwartungswert, 24
- Extrapolation, 46
- Extremwertaufgabe
 - mit Nebenbedingung, 28
- Fächer, **21**
- Fächerschar, 21, **21**, 76, 91
- Fächerscharen, 78
- Fächerschargeometrie, **21**, 31
- Fächerscharkoordinaten, 56
- Fächerscharprojektion, **21**, 55, 73
- Fächerspitze, **21**
- Fächerstrahlgeometrie, 20
- Führungsgerade, **21**, 79, 81, 83
 - parallele, 76, 79
- Führungsgeraden
 - identische, 91
- Führungsgeradenrichtung, 31, 36, 38, 45, 62, 91
- Feinstrukturkonstante, 12
- Fertigungsungenauigkeiten, 39
- Formänderung, 63
- Freiheitsgrad, 85
- Fundamentallemma der Variationsrechnung, 62, 65
- Funktionenraum, 86
- Gammastrahlung, 11
- geokalib, 44
- Geometriekalibrierkörper, **35**, 139
- Geometriekalibrierung, **35**, 44
- Geradengleichung, 20
- Grauwert, 15, 17, 18, 21
- Grauwertverteilung, 24, 101
- Hauptachsenhalbmesser, 111
- Heitler, 13
- Herstellerkalibrierung, 43
- Histogramm, 31
- Impulserhaltungssatz, 14
- Indirekte Inkonsistenzanalyse, **106**
- Inkonsistenz, 99
- Inkonsistenzanalyse, **99**
 - indirekte, **106**
- Inkonsistenzwert, 100, 101, 104, 108, 109
- Integralkern, 77
- Intensität, 17

- Interpolation, 36, 46
- Intervall, 74, 81
- Iteration, 19
- Iterationsgröße, 99
- Iterationsverfahren, 99, 111
- K-Schale, 12
- körperfestes Koordinatensystem, 71, 103
- Kalibrierkörper, 45
- kalibriertes Bild, 18, 55
- Kalibrierungsalgorithmus, 37
- Kegelstrahlgeometrie, 31
- Koeffizientenmatrix, 97
- Koeffizientenvergleich, 113
- kohärent, 14
- konstante Funktion, 83
- konstante Momentenfunktion, 91
- Koordinatensystem
 - maschinenfestes, 108
- Koordinatenursprung, 53, 71, 111
- Kugelanzeige, 36
- Kupfer, 46
- Lösungsmenge, 94
- Lagefehler, 122
- Lageveränderung, 63, 99, 101
- Lagrangeschen Multiplikatoren, 28
- lineares Gleichungssystem, 70, 75, 78, 97, 114, 115
- Linearkombination, 82, 99
 - aus nichtverschobenen Momentenfunktionen, 83
 - von Bildmomenten, 76
 - von Objektwichtungsfunktionen, 77
- Linienintegral, 18, 19, 45
- Makrolon, 35
- maschinenfeste Koordinatensystem, 108
- Massedichte, 17
- Massedichteverteilung, 23, 24
- Massenträgheitsmoment, 23
- Materialdicke, 46
- materialkalibriertes Bild, 47
- Materialkalibrierung, **45**, 125
- Materialzuordnungsfunktion, **19**, 45
- Messfehler, 104
- Messungenauigkeit, 101, 105
- Messwertdatensatz, 100
- Messwertvektor, 103
- Minimumrekonstruktion, 32
- Modell, 111

Moment, **22**
 Momente
 zusammengefasste, **63**
 Momentenellipse, 27, 54, 73, 111, 115
 Momentenellipsoid, 26, **26**, 27, 54, 67, 111, 115
 Ausdehnung, 27
 Dichte, 27
 Transformation, 67
 Momentenfunktion, **26**, 49, 77, 82, 83
 konstante, 91
 nicht konstante, 94
 Momentenfunktionen, 65
 konstante, 91
 Momententensor, **24**, 29, 54
 Momententransformationsmatrix, 108
 monoenergetisch, 11, 17, 45

 Näherungsfehler, 75, 81, 84, 100
 Näherungsproblem, 39, 78
 nichtlineares Gleichungssystem, 76
 NIST, 13
 Nullfunktion, 94

 Objektbereich, 57, 81, 84
 Objektbereichsgröße, 105
 Objektmoment, 111
 Objektmomentenellipsoid, 54, 55
 Parallelprojektion, 54
 Objektmomententensor, 54
 Objektraum, 19, 53, 85, 104
 Objektwichtungsfunktion, **55**, 77, 80, 81, 83, 101
 Ordnungszahl, 16
 Ordnungszahlabhängigkeit, 13
 Originalprojektion, 44

 Paarbildung, **14**
 Paarerzeugung, 18
 Parallelprojektion, 49, 115
 Parallelstrahlgeometrie, 20, **20**, 31, 53
 dreidimensionale, 53
 zweidimensionale, 20, 49
 Parallelstrahlprojektion, 69
 Parallelverschiebung, 21, 81
 Passpunkt, 32
 Passpunktmethode, 32
 Passpunktpaar, 32
 Photoeffekt, **12**
 Photonenstrahl, 11, 14
 Pixelspalte, 36, 38, 84

 polyenergetisch, 11, 18, 45
 Polyethylen, 46
 Positionierungsungenauigkeit, 21
 Positionswiederfindung, 69, 99
 Positron, 14
 Potenzreihe, 74
 Praxis, 100
 Primärstrahl, 15, 17
 Projektionsgerade, 20
 Projektionsgeraden, **19**
 Projektionsrichtung, 111

 Quadratmittelnäherung, 74, 83
 Quadratmittelproblem, 39, 77, 82
 diskretes, 86
 verallgemeinertes , **85**, 86, 89, 92, 94
 Quadratsumme, 99

 Röntgendurchstrahlungsanlage, 11
 Röntgenquelle, 21
 Radiografisch, 11
 Rasterung, 46
 Rauschen, 125
 Rayleigh-Streuung, 14
 Rechenaufwand, 83, 105
 Rekonstrukt, 32
 Residuum, 104
 Rotationsmatrix, 32
 Ruheenergie, 12, 14

 Satz des Pythagoras, 39
 Satz von Steiner, 63
 Schwächung, 16
 Schwächungsgesetz, 17
 Schwächungskoeffizient, 16
 Schwächungskoeffizientenverteilung, 24, 49, 63
 transformierte, 63
 Schwerpunkt, 23, 26, 27, 67, 71
 Transformation, 67
 Simulation, 99
 Smiths Detection, 9
 spektrale Empfindlichkeit, 19
 spektrale Empfindlichkeiten, 18, 45
 Startwert, 111
 Startwertbestimmung, **111**
 Statistik, 23
 Strahlungsleistung, 18
 Strecken, 31
 Streustrahlung, 11, 17
 Substitution, 57, 82
 Superposition, 83

Symmetrie, 114
 Testobjekt, 118
 Thomson-Streuung, 14
 Tichonov-regularisiertes Quadratmittelproblem, 104
 Tichonov-regularisiertes QMP, 100
 Transformationssatz für mehrdimensionale Substitution, 50, 58
 Translationsinvarianz, 83
 Translationsoperator, 85
 Transportband, 21, 44
 trigonometrische Beziehung, 72, 115
 Tunnel, 21, 44
 Tunnelbreite, 35
 Tunnelhöhe, 35

 Umklappen, 31
 umparametrisiertes Bild, 71
 Umparametrisierung, 51, **51**, 53, **60**, 62, 71, 74, 91, 138

 verallgemeinertes Quadratmittelproblem, **85**, 86, 89, 92, 94
 Verbindungsgeraden, 36
 Vergrößerungseffekt, 58, 111
 Vergrößerungsfaktor, 31
 Verschiebevektor, 32
 virtuelle Kugel, 36
 virtuelle Kugelanzeige, 36

 Wahrscheinlichkeitsdichte, 24
 Wechselwirkungsprozess, 11
 Wechselwirkungsquerschnitt, 11
 der Paarbildung, 14
 des Compton-Effekts, 13
 des Photoeffekts, 12
 Wechselwirkungswahrscheinlichkeit, 17
 Wichtungsfaktor, 99

 XCOM, 13

 Zeilendetektor, 21
 Zielfunktion, 85
 Zufallsvariable, 23
 zusammengefasste Momente, **63**
 Zwangsbedingung, 85

Symbolverzeichnis

α	Feinstrukturkonstante, Seite 12
$\bar{\mu}$	transformierte Schwächungskoeffizientenverteilung, Seite 63
\bar{L}_C	Linienintegral der Funktion der Materialabhängigkeit $H_C(\mathbf{x})$ des Compton-Effektes, Seite 18
\bar{L}_F	Linienintegral der Funktion der Materialabhängigkeit $H_F(\mathbf{x})$ des Photoeffektes, Seite 18
\bar{L}_P	Linienintegral der Funktion der Materialabhängigkeit $H_P(\mathbf{x})$ der Paarbildung, Seite 18
E_B	Basisebene, Seite 78
$J_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},\mathbf{af}}[w]$	Bildmoment für die Fächerscharprojektion, Seite 55
$J_{\mathbf{q},\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2}[w]$	Bildmoment für die Parallelstrahlgeometrie(dreidimensional), Seite 53
$J_{\mathbf{q},\mathbf{m}}[w]$	Bildmoment für die Parallelprojektion, Seite 49
\mathcal{K}_n	n -dimensionalen Einheitskugel, Seite 28
N_E	Anzahl der Detektoren mit verschiedenen spektralen Empfindlichkeiten an einem Bildpunkt, Seite 18
E_γ	Photonenenergie, Seite 12
ω_n	Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel, Seite 27
\mathbf{c}_i	Koeffizientenvektor zur Berechnung von Linearkombinationen von Bildmomenten, Seite 99
$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$	Basisvektoren der Detektorebene, Seite 111
\mathbf{f}	Richtungsvektor der Detektorgeraden im Fall der Fächerschargeometrie, Seite 22
\mathbf{M}	die zum Momententensor $M(\mathbf{a},\mathbf{a})$ zweiter Stufe zugehörige symmetrische Matrix, Seite 27
\mathbf{m}	Detektorgeradenrichtung für die Parallelstrahlgeometrie, Seite 20
\mathbf{N}	Matrix zum Bildmomententensor $N(\mathbf{a},\mathbf{a})$ zweiter Stufe, Seite 54
\mathbf{n}	Für Parallelstrahlgeometrie: Richtung der Röntgenstrahlen Für Fächerschargeometrie: Führungsgeradenrichtung, Seite 20

$\mathbf{p}_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},\mathbf{af}}(u,v,t)$	Ortsvektor eines Punktes im Objektraum für den Fall der Fächerschargeometrie, Seite 22
$\mathbf{p}_{\mathbf{q},\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2}(u,v,t)$	Ortsvektor eines Punktes im Objektraum für die dreidimensionale Parallelstrahlgeometrie, Seite 53
$\mathbf{p}_{\mathbf{q},\mathbf{m}}(u,t)$	Ortsvektor eines Punktes im Objektraum für die zweidimensionale Parallelstrahlgeometrie, Seite 20
\mathbf{q}	Ortsvektor der Basisquelle, Seite 20
\mathbf{r}	Richtungsvektor der Basisgeraden, Seite 22
\mathbf{T}	Matrix, welche die Koordinatentransformation der Lage- und Formänderung beschreibt, Seite 63
\mathbf{v}	Projektionsrichtung, Seite 111
\mathbf{x}_S	Ortsvektor des Schwerpunktes, Seite 26
\mathcal{D}	Detektorebene, Seite 22
\mathcal{V}	Momentenellipsoid, Seite 26
\mathcal{V}_M	Momentenellipsoid zur Matrix \mathbf{M} , Seite 111
\mathcal{V}_N	Momentenellipse zur Matrix \mathbf{N} , Seite 111
\mathcal{K}	Objektbereich beziehungsweise Objektraum, Seite 57
f_C	Energieabhängigkeit des Compton-Effektes, Seite 16
f_F	Energieabhängigkeit des Photoeffektes, Seite 16
f_P	Energieabhängigkeit der Paarbildung, Seite 16
$L_{\mathbf{q},\mathbf{n},\mathbf{r},\mathbf{af}}(u,v)$	Linienintegral der Schwächungskoeffizientenverteilung entlang einer Projektionsgerade für die Fächerschargeometrie, Seite 22
$L_{\mathbf{q},\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2}(u,v)$	Linienintegral der Schwächungskoeffizientenverteilung entlang einer Projektionsgerade für den Fall der Parallelstrahlgeometrie (dreidimensional), Seite 53
$L_{\mathbf{q},\mathbf{m}}$	Linienintegral der Schwächungskoeffizientenverteilung entlang einer Projektionsgerade für den Fall der Parallelstrahlgeometrie, Seite 21
$\sigma_C(Z,E_\gamma)$	Wechselwirkungsquerschnitt des Compton-Effektes, Seite 14
$\sigma_F(Z,E_\gamma)$	Wechselwirkungsquerschnitt des Photoeffektes, Seite 12
$\sigma_P(Z,E_\gamma)$	Wechselwirkungsquerschnitt der Paarbildung im Kernfeld, Seite 14
$\mu_F(\mathbf{x},E_\gamma), \mu_C(\mathbf{x},E_\gamma), \mu_P(\mathbf{x},E_\gamma)$	Schwächungskoeffizient für den Photoeffekt (F), den Compton-Effekt (C) und die Paarbildung (P) für Photonen der Energie E_γ am Ort X . Dieser Schwächungskoeffizient würde sich ergeben, wenn nur die betrachtete Wechselwirkung stattfinden würde, Seite 16

$\mu_{ges}(\mathbf{x}, E_\gamma)$	Schwächungskoeffizient für Photonen der Energie E_γ am Ort X , Seite 16
$h_C(Z)$	Ordnungszahlabhängigkeit des Compton-Effektes, Seite 16
$h_F(Z)$	Ordnungszahlabhängigkeit des Photoeffektes, Seite 16
$h_P(Z)$	Ordnungszahlabhängigkeit der Paarbildung, Seite 16
H_C	Funktion der Materialabhängigkeit des Compton-Effektes, Seite 16
H_F	Funktion der Materialabhängigkeit des Photoeffektes, Seite 16
H_P	Funktion der Materialabhängigkeit der Paarbildung, Seite 16
$\bar{\tau}_a$	Translationsoperator im Bildraum, Seite 85
τ_a	Translationsoperator im Objektraum, Seite 85
a	Parameter der Fächerschargeometrie welcher die Detektorebene festlegt, Seite 22
$a_i(E)$	spektrale Empfindlichkeiten, Seite 18
a_v	Auflösung in Führungsgeradenrichtung, Seite 38
d_i	Wichtungsfaktoren für die Berechnung der Iterationsgröße, Seite 99
E_0	Ruheenergie des Elektrons, Seite 12
$E_B(Z)$	Bindungsenergie der Elektronen der K-Schale, Seite 12
$F_i(\bar{L}_F, \bar{L}_C, \bar{L}_P)$	Materialzuordnungsfunktion, Seite 19
G_i	Grauwert des unkalibrierten Projektionsbildes (zugehörig zu einem Detektor mit spektraler Empfindlichkeit $a_i(E)$), Seite 18
$h_{\mathbf{q}, \mathbf{n}, \mathbf{r}, af}[w]$	Objektwichtungsfunktion, Seite 55
M	Moment nullter Ordnung, Seite 26
$M(\mathbf{a})$	Momententensor erster Ordnung, Seite 25
$M(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N)$	Momententensor n -ter Stufe, Seite 25
$M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$	Momententensor zweiter Ordnung, Seite 25
$M_{\mathbf{q}}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N)$	Momententensor n -ter Stufe um den Punkt Q mit dem Ortsvektor \mathbf{q} , Seite 26
$N(\mathbf{a}, \mathbf{a})$	Momententensor zweiter Stufe des Bildes, Seite 54
$n(\mathbf{x}, Z)$	Dichte von Teilchen mit der Ordnungszahl Z am Ort X mit dem Ortsvektor \mathbf{x} , Seite 16
Q	Basisquelle, Seite 20
t	Wegparameter eines Röntgenstrahles, Seite 17
u	Bildkoordinate des Projektionsbildes, Seite 20

w	Bildwichtungsfunktion, Seite 55
X_S	Schwerpunkt, Seite 26
Z	Ordnungszahl, Seite 12